រាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា
វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រ និង បច្ចេកវិទ្យា
ផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ស្ថិតិ

ដំណោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

Solutions des Équations Intégrales

ភាគ១

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

$$\int_a^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

គ.ស 2009

ឯកសាររបស់លោក យិម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា
ទុកសម្រាប់ផ្នែកគណិតវិទ្យា និងស្ថិតិ

Tuesday Date: 26-05-09

Vichea

ដំណោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

Solutions des Équations Intégrales

ភាគ១

និពន្ធដោយ : **លោក យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា**

បរិញ្ញាបត្រជាន់ខ្ពស់ ជំនាន់ទី ១ ផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ស្ថិតិ

មន្ត្រីនៅរាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា

ពិនិត្យដោយ : **លោក ហាក់ សុខេង**

បរិញ្ញាបត្រជាន់ខ្ពស់ ជំនាន់ទី ១ ផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ស្ថិតិ

អនុប្រធានផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ស្ថិតិ

បោះពុម្ពលើកទី១ (ឆ្នាំ ២០០៩)

អារម្ភកថា

សៀវភៅ "*ដំណោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល*" ភាគ១ នេះរៀបរៀងឡើងដើម្បីទុកជាឯក-សារជំនួយខ្លះដល់ការស្រាវជ្រាវរបស់និស្សិត សាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវមួយចំនួនដែលមានបំណងសិក្សាខាងវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា ជាពិសេសផ្នែកគណិតវិទ្យានិងរូបវិទ្យា ។

នាពេលបច្ចុប្បន្ននេះ វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រ និង បច្ចេកវិទ្យានៃរាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជាពុំទាន់មានឯកសារនេះគ្រប់គ្រាន់ក្នុងការសិក្សាស្រាវជ្រាវឱ្យបានស៊ីជម្រៅខាងផ្នែកទ្រឹស្តីនៅក្នុងកម្រិតឧត្តមសិក្សានិងក្រោយឧត្តមសិក្សាផង ហើយក៏ត្រូវការឯកសារជាខេមរភាសាផង ។ ហេតុនេះដើម្បីឆ្លើយតបនូវតម្រូវការចាំបាច់ យើងខ្ញុំជាអ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិបានចងក្រងសៀវភៅ "*ដំណោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល*" ភាគ១ នេះឡើង ។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះ មានពីរជំពូក និង សេចក្តីបន្ថែមពីរទៀត ។ ជំពូកទី១ សិក្សាអំពីសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ា ដែលក្នុងនោះមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ រ៉េសូលវ៉ង់ អាំងតេក្រាលអ៊ីឡើរីយ៉ែន សមីការអាំងតេក្រាលអាបែល ភាពទូទៅ ឧទាហរណ៍ ដំណោះស្រាយនិងលំហាត់ ។ រីឯជំពូកទី២ សិក្សាអំពីសមីការអាំងតេក្រាលប្រេដូម ដែលក្នុងនោះមានវិធីសាស្ត្រប្រេដូម ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ រ៉េសូលវ៉ង់ សមីការអាំងតេក្រាលមានស្នូលទូទៅ ឧទាហរណ៍ ដំណោះស្រាយនិងលំហាត់ជាច្រើនទៀត ។

យើងខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះនិស្សិត សាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវដែលបានអាននិងគាំទ្រដល់ស្នាដៃនៃការសរសេរសៀវភៅ "*ដំណោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល*" ភាគ១ នេះ ហើយសូមស្វាគមន៍ជានិច្ចរាល់ការរិះគន់ស្ថាបនាដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះកាន់តែសុក្រិត្យថែមទៀត ។

ភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី០៨ ខែឧសភា ឆ្នាំ២០០៩

យឹម អាយុទព្វនៈវិជ្ជា

មាតិកា

ជំពូកទី ១

សមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ា
(Équations Intégrales de Volterra)

១.១_សញ្ញាណដំបូង (Notions fondamentales)

☞ សមីការមានអញ្ញាត $\varphi(x)$ មួយកំណត់ដោយទម្រង់ :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1.1)$$

ដែល f(x), K(x, t) ជាអនុគមន៍ដែលគេឱ្យ និង λ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រលេខ ។ សមីការ (1.1) ហៅថាជា *សមីការអាំងតេក្រាលលីនេអ៊ែរវ៉ុលទែរ៉ា* ។ អនុគមន៍ K(x, t) ជាស្នូលនៃសមីការវ៉ុលទែរ៉ា ។ បើ $f(x) \equiv 0$ នោះសមីការ (1.1) អាចសរសេរជា

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1.2)$$

ហើយគេហៅវាថាជា *សមីការអូម៉ូហ្សែន* (équation homogène) វ៉ុលទែរ៉ាក្នុងប្រភេទទីពីរ ។

☞ សមីការមានអញ្ញាត $\varphi(x)$ មួយ ដែលកំណត់ដោយទម្រង់ :

$$\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \qquad (1.3)$$

ហៅថាជា *សមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ា* ក្នុងប្រភេទទីមួយ ។ យើងសន្មតជាបន្តថា គោលក្រោម a ស្មើនឹងសូន្យ ដែលវាមិនមែនជាលទ្ធផលទូទៅនោះទេ ។

គេហៅអនុគមន៍ $\varphi(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាល (1.1), (1.2) ឬ (1.3) ពីព្រោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់ក្នុងសមីការនេះ តាមការជំនួសជាលក្ខណៈសមភាព ។

ឧទាហរណ៍ ១ : បង្ហាញថាអនុគមន៍ $\varphi(x) = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$ ជាចម្លើយសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ា

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\,\varphi(t)\,dt \qquad (1.4)$$

ដំណោះស្រាយ

ដោយជំនួស $\varphi(x)=\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$ ក្នុងអង្គទីពីរនៃសមីការ (1.4) យើងបាន :

$$\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=\varphi(x) \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\varphi(x)=\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$ ជាចម្លើយសមីការអាំងតេក្រាល (1.4) ។

ឧទាហរណ៍ ២ : បង្ហាញថាអនុគមន៍ $\varphi(x)=1-x$ ជាចម្លើយសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ា

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x \qquad (1.5)$$

ដំណោះស្រាយ

ដោយជំនួស $\varphi(x)=1-x$ ក្នុងអង្គទីមួយនៃសមីការ (1.5) យើងបាន :

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=\int_0^x e^{x-t}(1-t)\,dt$$

$$=e^x\int_0^x e^{-t}(1-t)\,dt$$

យើងប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក

$u=1-t \quad => \quad du=-dt$

និង $dv=e^{-t}dt \quad => \quad v=-e^{-t}$

នាំឱ្យ $\int_0^x e^{-t}(1-t)\,dt=-(1-t)\,e^{-t}\Big|_0^x-\int_0^x e^{-t}dt$

$$=-(1-x)\,e^{-x}+1+e^{-t}\Big|_0^x$$

$$= -(1-x)\,e^{-x} + 1 + e^{-x} - 1$$

$$= x\,e^{-x}$$

ដូច្នេះ $\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt = e^x(x\,e^{-x}) = x$ ពិត

មានន័យថា $\varphi(x) = 1 - x$ ជាចម្លើយសមីការអាំងតេក្រាល (1.5) ។

<u>សំគាល់</u> : សមីការអាំងតេក្រាលវ៉ូលតែរ៉ា បានកើតមានឡើងក្នុងបញ្ហារូបវិទ្យា ដែលវាមានទិសដៅផ្ទាល់មួយដោយបម្រែបម្រួលនៃអថេរឯករាជ្យ ជាឧទាហរណ៍ដូចជា ពេលវេលា ថាមពល ...... ។

ឧទាហរណ៍ ៣ : យើងពិនិត្យបាច់នៃកាំរស្មី X ដែលឆ្លងកាត់សារធាតុតាមអ័ក្ស 0X និងយើងអាចយល់ដឹងថា បាច់ទាំងនេះមិនងាកចេញពីគន្លងទេ ។ ឧបមាថាសំណុំនៃកាំរស្មីតាមកម្រិតរលកធាតុអាកាសដែលគេបានឱ្យ ។ នៅពេលដែលកាំរស្មីឆ្លងកាត់ស្រទាប់សារធាតុដោយកម្រាស់ dx នោះផ្នែកមួយមានលក្ខណៈស្រូបនិងមួយផ្នែកទៀតមានកម្រិតរលកធាតុអាកាសផ្លាស់ប្តូរដោយបន្តដំណើរសាយភាយ ។ម្យ៉ាងទៀតសំណុំជាបញ្ហាបានមកពីកាំរស្មី ដែលគេមានព្រីមីទីវនៃថាមពលឡើងខ្ពស់ (មានន័យថា កម្រិតរលកធាតុអាកាស λ មានតម្លៃតូច) ហើយដែលនាំឱ្យខូចដល់ផ្នែកមួយតាមដំណើរសាយភាយ ។ ដូច្នេះ បើសិនអនុគមន៍ $f(\lambda, x)\,d\lambda$ កំណត់ជាសំណុំនៃកាំរស្មីតាមកម្រិតរលកធាតុអាកាស ដែលគេរាប់បញ្ចូលក្នុងចន្លោះ λ និង $\lambda + d\lambda$ នោះគេបាន :

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x} = -\mu\, f(\lambda, x) + \int_0^\lambda P(\lambda, \tau)\, f(\tau, x)\, d\tau \qquad (1.6)$$

ដែល μ ជាមេគុណនៃទំនាញស្រូប និង $P(\lambda, \tau)\,d\tau$ ជាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យកាំរស្មីនៃកម្រិតរលកធាតុអាកាស τ ទទួលបានបន្ទាប់ពីឆ្លងកាត់ស្រទាប់កម្រាស់ឯកតាមួយ ដែលមានប្រវែងត្រឹមចន្លោះ λ និង $\lambda + d\lambda$ ។

យើងទទួលបាន *សមីការអាំងតេក្រាលឌីផេរ៉ង់ស្យែល* (équation intégro-différentielle) មានន័យថា ជាសមីការដែលមានអនុគមន៍អញ្ញាត $f(\lambda, x)$ ក្រោមសញ្ញានៃបម្រែបម្រួល និង $\int$ ។

យើងតាង

$$f(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-px}\,\psi(\lambda, p)\,dp \qquad (1.7)$$

ដែល $\psi(\lambda, p)$ ជាអនុគមន៍អញ្ញាតថ្មី ហើយយើងបានបង្ហាញថា អនុគមន៍នេះផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ាក្នុងប្រភេទទីពីរ :

$$\psi(\lambda, p)=\frac{1}{\mu-p}\int_0^{\lambda} P(\lambda,\tau)\,\psi(\tau,p)\,d\tau \qquad (1.8)$$

១.២. ទំនាក់ទំនងរវាងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរនិងសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ា (Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra)

☞ ការដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ :

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots\dots+a_n(x)\,y=F(x) \qquad (1.9)$$

ដែលមានមេគុណជាអនុគមន៍ជាប់ $a_i(x)$ $(i=1,2,\dots,n)$ ជាមួយល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម

$$y(0)=C_0,\quad y'(0)=C_1,\dots\dots,\quad y^{(n-1)}(0)=C_{n-1} \qquad (1.10)$$

ដែលអាចបំបែរទៅរកការដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ាក្នុងប្រភេទទីពីរ ។

☞ យើងបង្ហាញជាឧទាហរណ៍នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)\,y=F(x) \qquad (1.11)$$

និង $y(0)=C_0,\quad y'(0)=C_1$ (1.12)

យើងតាង $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$ (1.13)

ពីល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម (1.12) និងប្រើរូបមន្ត

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}dx\dots\dots\int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}f(z)\,dz$$

យើងបាន :

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \varphi(t)\,dt+C_1 \qquad (1.14)$$

និង
$$y=\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+C_1\,x+C_0 \qquad (1.15)$$

ដោយជំនួសសមីការ (1.13), (1.14) និង (1.15) ចូលក្នុងសមីការដើម (1.11) គេបាន :

$$\varphi(x)+\int_0^x a_1(x)\,\varphi(t)\,dt+C_1\,a_1(x)+\int_0^x a_2(x)\,(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$
$$+C_1\,x a_2(x)+C_0\,a_2(x)=F(x)$$

ឬ

$$\varphi(x)+\int_0^x [\,a_1(x)+a_2(x)\,(x-t)\,]\,\varphi(t)\,dt=F(x)-C_1\,a_1(x)-C_1\,x a_2(x)-C_0\,a_2(x) \qquad (1.16)$$

តាង $K(x,t)=-[a_1(x)+a_2(x)\,(x-t)]$ (1.17)

និង $f(x)=F(x)-C_1\,a_1(x)-C_1\,x a_2(x)-C_0\,a_2(x)$ (1.18)

នោះសមីការ (2.16) ទៅជាទម្រង់ :

$$\varphi(x)=\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt+f(x) \qquad (1.19)$$

មានន័យថា យើងទទួលបានសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ូលទែរ៉ាក្នុងប្រភេទទីពីរ ។

☞ ភាពមានតែមួយនៃចម្លើយសមីការ (1.19) ជាលទ្ធផលនៃអត្ថិភាព និង ភាពមានតែមួយនៃចំណោទកូស៊ី (1.11) – (1.12) ចំពោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ ដែលមានមេគុណជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងវិស៊ីណាត្រង់ x = 0 ។

☞ ច្រាសមកវិញ លទ្ធផលសមីការអាំងតេក្រាល (1.19) ជាមួយអនុគមន៍ K និង f ដែលបានកំណត់ដោយរូបមន្ត (1.17) និង (1.18) រួចហើយ $\varphi(x)$ ទទួលបានពីសមីការ (1.15) នោះយើងបានចម្លើយនៃសមីការ (1.11) ផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម (1.12) ។

ឧទាហរណ៍ ៤ : បង្កើតសមីការអាំងតេក្រាល ដែលត្រូវគ្នានឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

$$y''+x\,y'+y=0$$

និងល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម $y(0)=1,\ y'(0)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$ (1.20)

យើងបាន : $\dfrac{dy}{dx}=\int_0^x \varphi(t)\,dt+y'(0)=\int_0^x \varphi(t)\,dt$ (1.21)

និង

$$y=\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+1 \qquad (1.22)$$

ដោយជំនួសសមីការ (1.21) និង (1.22) ចូលក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលឱ្យ យើងបាន :

$$\varphi(x)+\int_0^x x\,\varphi(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+1=0$$

ឬ $\varphi(x)=-1-\int_0^x (2x-t)\,\varphi(t)\,dt$

ដែលជាសមីការអាំងតេក្រាល ។

ឧទាហរណ៍ ៥ : បង្កើតសមីការអាំងតេក្រាល ដែលត្រូវគ្នានឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

$$y''+(1+x^2)\,y=\cos x$$

និងល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម $y(0)=0,\ \ y'(0)=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\varphi(x)=\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''$ យើងបាន :

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \varphi(t)\,dt+y'(0)=\int_0^x \varphi(t)\,dt+2$$

និង

$$y=\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt+y'(0)\,x+y(0)$$

$$=\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt+2x$$

ជំនួសតម្លៃ y'' និង y ចូលក្នុងសមីការដែលឱ្យ យើងបាន :

$$\varphi(x)+(1+x^2)\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt+2x\,(1+x^2)=\cos x$$

ដូចនេះ សមីការអាំងតេក្រាលគឺ :

$$\varphi(x)=\cos x-2x\,(1+x^2)-\int_0^x (1+x^2)(x-t)\varphi(t)\,dt$$

☞ គេដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ូលតែរ៉ា ក្នុងប្រភេទទីមួយ និង ទីពីរតាមរបៀបសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

ឧទាហរណ៍ ៦ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)=x+\int_0^x xt\,\varphi(t)\,dt \qquad (1.23)$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សមីការ (1.23) អាចសរសេរ :

$$\varphi(x)=x\left(1+\int_0^x t\,\varphi(t)\,dt\right) \qquad (1.24)$$

តាង $y(x)=1+\int_0^x t\,\varphi(t)\,dt$ (1.25)

គេបាន : $y'(x)=x\,\varphi(x)$

តាមសមីការ (1.24) និង (1.25) នាំឱ្យ

$$\varphi(x)=x\,y(x)$$

ហើយ $y'(x)=x^2\,y(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)}=x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y(x)|=\frac{x^3}{3}+k$$ (k ជាចំនួនថេរ)

នាំឱ្យ $y(x)=\pm e^k\times e^{\frac{x^3}{3}}=C\,e^{\frac{x^3}{3}}$ ($C=\pm e^k$ ជាចំនួនថេរ)

ប៉ុន្តែ $y(0)=1$ នាំឱ្យ $C=1$ និង $y(x)=e^{\frac{x^3}{3}}$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (2.23) គឺ :

$$\varphi(x)=x\,y(x)=x\,e^{\frac{x^3}{3}}$$

ឧទាហរណ៍ ៧ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)=2\int_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2}\,\varphi(t)\,dt+1 \qquad (1.26)$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សមីការ (1.26) អាចសរសេរជាទម្រង់ :

$$\varphi(x)=\frac{2}{(2x+1)^2}\int_0^x (2t+1)\,\varphi(t)\,dt+1 \qquad (1.27)$$

តាង $u(x)=\int_0^x (2t+1)\varphi(t)\,dt$ (1.28)

គេបាន : $u'(x)=(2x+1)\varphi(x)$

តាមសមីការ (1.27) និង (1.28) នាំឱ្យបាន

$$\varphi(x)=\frac{2}{(2x+1)^2}u(x)+1$$

ហើយ $u'(x)=(2x+1)\left\{\frac{2}{(2x+1)^2}\,u(x)+1\right\}$

$$\Leftrightarrow \qquad =\frac{2}{2x+1}\,u(x)+(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad u'(x)-\frac{2}{2x+1}\,u(x)=(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x+1}u'(x)-\frac{2}{(2x+1)^2}\,u(x)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{2x+1}\right)=1$$

នាំឱ្យ $\dfrac{u(x)}{2x+1} = x + C$ (C ជាចំនួនថេរ)

និង $u(x) = (2x+1)(x+C)$ ។

ប៉ុន្តែ $u(0) = 0$ នាំឱ្យ $C = 0$ និង $u(x) = x(2x+1)$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (1.26) គឺ :

$$\varphi(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}u(x) + 1$$

$$= \frac{2}{(2x+1)^2}x(2x+1) + 1$$

$$= \frac{2x}{2x+1} + 1 = \frac{4x+1}{2x+1}$$

១.៣. រ៉េសូលវ៉ង់នៃសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ូលទែរ៉ា
(Résolvante de l'équation intégrale de Volterra)

☞ គេមានសមីការអាំតេក្រាលវ៉ូលទែរ៉ាប្រភេទទីពីរ

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt \qquad (1.29)$$

ដែល K(x, t) ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះ $0 \le x \le a$, $0 \le t \le x$ និង f(x) ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $0 \le x \le a$ ។

☞ យើងស្វែងរកដំណោះស្រាយនៃសមីការនេះ ក្រោមទម្រង់ជាស៊េរីគត់ដែលកំណត់តាមស្វ័យគុណនៃ λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots \qquad (1.30)$$

តាមសមីការ (1.29) និង (1.30) យើងបាន :

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots =$$

$$= f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\left[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \dots + \lambda^n\varphi_n(t) + \dots\right]dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)\,dt + \ldots\ldots + \lambda^n \int_0^x K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt + \ldots..$$

ដោយប្រៀបធៀបមេគុណនៃពហុធា យើងបាន :

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)\,dt = \int_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)\,dt \qquad (1.31)$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)\,f(t_1)\,dt_1\,dt$$

....

តាមមធ្យោបាយនៃទំនាក់ទំនង (1.31) គេអាចកំណត់អនុគមន៍ $\varphi_n(x)$ ជាបន្តបន្ទាប់ ។ ដោយ f(x) និង K(x, t) ជាអនុគមន៍ជាប់ នោះស៊េរី (1.30) ជាស៊េរីរួមស្មើគ្រប់ x និង λ ចំពោះគ្រប់ λ, x $\in [0, a]$ ហើយផលបូករបស់វា ជាចម្លើយនៃសមីការ (1.29) ។

យើងធ្វើទំនាក់ទំនង (1.31) ជាបន្ត :

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)\,f(t_1)\,dt_1\right]dt$$

$$= \int_0^x f(t_1)\,dt_1 \int_{t_1}^x K(x,t)\,K(t,t_1)\,dt$$

$$= \int_0^x K_2(x,t_1)\,f(t_1)\,dt_1$$

ដែល $K_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x K(x,t)\,K(t,t_1)\,dt$ ។

☞ គេបង្ហាញតាមរបៀបស្រដៀងគ្នា នោះយើងបានរូបមន្តទូទៅ :

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,t)\,f(t)\,dt \quad (n = 1, 2, 3, \ldots.) \qquad (1.32)$$

អនុគមន៍ $K_n(x,t)$ ហៅថាជា *ស្នូលអ៊ីតេរេ* (Noyaux itérés) ហើយវាកំណត់បានតាមរូបមន្ត កំណើន :

$$K_1(x,t)=K(x,t)$$

និង $$K_{n+1}(x,t)=\int_t^x K(x,z)\,K_n(z,t)\,dz \quad (n=1,2,3,.....) \qquad (1.33)$$

ពីសមីការ (1.32) និង (1.33) នោះសមីការ (1.30) អាចសរសេរ

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^{\nu}\int_0^x K_{\nu}(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$=f(x)+\int_0^x\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^{\nu}K_{\nu}(x,t)\,f(t)\right]dt$$

អនុគមន៍ $R(x,t;\lambda)$ កំណត់ដោយស៊េរី

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu}K_{\nu+1}(x,t) \qquad (1.34)$$

ជារ៉េស្វូលវ៉ង់ (Résolvante ឬ Noyau résolvant) នៃសមីការអាំងតេក្រាល (1.29) ។ បើអនុគមន៍ស្នូល K(x, t) ជាអនុគមន៍ជាប់ នោះស៊េរី (1.34) រួមដាច់ខាត និងរួមស្មើ ។

☞ ស្នូលអ៊ីតេរេ និងរ៉េស្វូលវ៉ង់ គឺមិនអាស្រ័យនឹងលីមីតលើ (limite inférieure) នៃអាំងតេក្រាលនៅក្នុងសមីការអាំងតេក្រាល ។ រ៉េស្វូលវ៉ង់ $R(x,t;\lambda)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការអនុគមន៍ខាងក្រោម :

$$R(x,t;\lambda)=K(x,t)+\lambda\int_t^x K(x,s)\,R(s,t;\lambda)\,ds$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាល (1.29) ជាអនុគមន៍នៃរ៉េស្វូលវ៉ង់ ដែលបានសរសេរដូចតទៅ :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x R(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt \qquad (1.35)$$

ឧទាហរណ៍ ៨ : រករ៉េស្វូលវ៉ង់នៃសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ា ដែលមានស្នូល K(x, t) = 1 ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $K_1(x,t) = K(x,t) = 1$ ។

តាមរូបមន្ត (1.33) គេបាន :

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_1(z,t)\, dz = \int_t^x dz = x - t$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_2(z,t)\, dz = \int_t^x (1)\,(z-t)\, dz = \frac{(x-t)^2}{2!}$$

$$K_4(x,t) = \int_t^x (1)\,\frac{(z-t)^2}{2}\, dz = \frac{(x-t)^3}{3\,!}$$

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

$$K_n(x,t) = \int_t^x 1\cdot K_{n-1}(z,t)\, dz = \int_t^x \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)\,!}\, dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

ពីនិយមន័យ យើងបាន :

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n\,!} = e^{\lambda(x-t)}$$

ឧទាហរណ៍ ៩ : រករ៉េសូលវ៉ង់នៃសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលតេរ៉ា ដែលមានស្នូល $K(x,t) = e^{x-t}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $K_1(x,t) = K(x,t) = e^{x-t}$ និង

តាមរូបមន្ត (1.33) យើងបាន :

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_1(z,t)\, dz = \int_t^x e^{x-z}\cdot e^{z-t} dz = e^{x-t}\,(x-t)$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_2(z,t)\, dz = \int_t^x e^{x-z} e^{z-t}\,(z-t)\, dz = e^{x-t}\,\frac{(x-t)^2}{2\,!}$$

$$K_4(x,t)=\int_t^x K(x,z)\,K_3(z,t)\,dz=\int_t^x e^{x-z}e^{z-t}\,\frac{(z-t)^2}{2\,!}\,dz=e^{x-t}\,\frac{(x-t)^3}{3\,!}$$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

$$K_n(x,t)=\int_t^x K(x,z)\,K_{n-1}(z,t)\,dz=\int_t^x e^{x-z}e^{z-t}\,\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)\,!}\,dz$$

$$=\frac{e^{x-t}}{(n-2)\,!}\int_t^x (z-t)^{n-2}\,d(z-t)=e^{x-t}\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

ពីនិយមន័យ យើងបាន :

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,K_{n+1}(x,t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\,e^{x-t}\,(x-t)^n}{n\,!}=e^{x-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(x-t)]^n}{n\,!}$$

$$=e^{x-t}\,e^{\lambda(x-t)}=e^{(1+\lambda)(x-t)}$$

ឧទាហរណ៍ ១០ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)=x^2+\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt \qquad (*)$$

តាមពីរវិធី :

(a). តាមវិធីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

(b). តាមវិធីដោយប្រើសមីការរ៉េសូលវ៉ង់ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

(a). កំណត់ $\varphi(x)$ តាមវិធីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

សមីការ $(*)$ អាចសរសេរ :

$$\varphi(x)=x^2+e^x\int_0^x e^{-t}\,\varphi(t)\,dt \qquad (**)$$

តាង $u(x)=\int_0^x e^{-t}\,\varphi(t)\,dt \qquad (***)$

គេបាន : $u'(x) = e^{-x}\varphi(x)$

តាមសមីការ (**) និង (***) នាំឱ្យ

$$\varphi(x) = x^2 + e^x u(x)$$

ហើយ $u'(x) = e^{-x}\left(x^2 + e^x u(x)\right)$

$$\Leftrightarrow \quad u'(x) - u(x) = x^2 e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}u' - e^{-x}u = x^2 e^{-2x}$$

(ពីព្រោះ $I(x) = e^{\int(-1)dx} = e^{-x}$ ជាកត្តាអាំងតេក្រាល)

នាំឱ្យ $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}u) = x^2 e^{-2x}$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}u = \int x^2 e^{-2x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}u = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$ (C ជាចំនួនថេរ)

នាំឱ្យ $u = u(x) = -\dfrac{x^2}{2}e^{-x} - \dfrac{x}{2}e^{-x} - \dfrac{1}{4}e^{-x} + C\,e^x$

ប៉ុន្តែ $u(0) = 0$ នាំឱ្យ $-\dfrac{1}{4} + C = 0$ និង $C = \dfrac{1}{4}$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (*) គឺ :

$$\varphi(x) = x^2 + e^x u(x)$$

$$= x^2 + e^x\left(-\frac{x^2}{2}e^{-x} - \frac{x}{2}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^x\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{2x}}{4}$$

(b). កំណត់ $\varphi(x)$ តាមវិធីដោយប្រើសមីការរ៉េសូលវ៉ង់

យើងមាន : $f(x) = x^2$; $\lambda = 1$ និង $K(x, t) = e^{x-t}$ ។

ពីឧទាហរណ៍ ៩ គេទាញបាន :

$$R(x,t;1)=e^{(1+\lambda)(x-t)}=e^{(1+1)(x-t)}=e^{2(x-t)}$$

ពីរូបមន្ត (1.35) យើងបានចម្លើយនៃសមីការ (*) គឺ :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x R(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt$$

$$=x^2+\int_0^x e^{2(x-t)}\,t^2dt$$

$$=x^2+e^{2x}\int_0^x t^2\,e^{-2t}\,dt$$

$$=x^2+e^{2x}\left(-\frac{x^2}{2}e^{-2x}-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{4}\right) \text{ (ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)}$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{e^{2x}}{4}$$

☞ យើងឧបមាថាស្នូល K(x, t) ជាពហុធាដឺក្រេទី n − 1 ធៀបនឹងអថេរ t ហើយដូចនេះ វាអាចសរសេរជាទម្រង់ :

$$K(x,t)=a_0(x)+a_1(x)\,(x-t)+......+\frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)\,!}\,(x-t)^{n-1} \qquad (1.36)$$

ដែលមេគុណ $a_k(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ [0, a] ។ គេកំណត់អនុគមន៍ $g(x,t;\lambda)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

$$\frac{d^ng}{dx^n}-\lambda\left[a_o(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}+a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}+....+a_{n-1}(x)\,g\right]=0 \qquad (1.37)$$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ

$$g\big|_{x=t}=\frac{dg}{dx}\bigg|_{x=t}=......=\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\bigg|_{x=t}=0 \quad \text{និង} \quad \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\bigg|_{x=t}=1 \qquad (1.38)$$

នោះរ៉េស្ទូលវ៉ង់ R(x, t; λ) កំណត់ដោយសមភាព :

$$R(x,t;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{d^ng(x,t;\lambda)}{dx^n} \qquad (1.39)$$

ដូចគ្នាដែរ បើ

$$K(x,t)=b_0(t)+b_1(t)(t-x)+\dots\dots+\frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1} \qquad (1.40)$$

នោះរ៉េស៊ូលវ៉ង់ R កំណត់ដោយសមភាព :

$$R(x,t;\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{d^n g(t,x;\lambda)}{dt^n} \qquad (1.41)$$

ដែល $g(x,t;\lambda)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

$$\frac{d^n g}{dt^n}+\lambda\left[b_o(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}}+b_1(t)\frac{d^{n-2}g}{dt^{n-2}}+\dots+b_{n-1}(t)\,g\right]=0 \qquad (1.42)$$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ល័ក្ខខ័ណ្ឌ (1.38) ។

ឧទាហរណ៍ ១១ : កំណត់រ៉េស៊ូលវ៉ង់នៃសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងមាន : $\lambda=1$ និង $K(x,t)=x-t$ និង

តាមសមីការ (1.36) នោះ $a_1(x)=1$ និង $a_k(x)=0$ $(k\neq 1)$ ។

សមីការ (1.37) មានទម្រង់

$$\frac{d^2g(x,t;1)}{dx^2}-g(x,t;1)=0$$

ដែល $g(x,t;1)=g(x,t)=C_1(t)\,e^x+C_2(t)\,e^{-x}$

តាមល័ក្ខខ័ណ្ឌ (1.38) គេបាន :

$$\begin{cases} C_1(t)\,e^t+C_2(t)\,e^{-t}=0 \\ C_1(t)\,e^t-C_2(t)\,e^{-t}=1 \end{cases} \qquad (1.43)$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (1.43) យើងបាន :

$$C_1(t)=\tfrac{1}{2}e^{-t},\quad C_2(t)=-\tfrac{1}{2}e^{t}$$

នាំឱ្យ

$$g(x,t;1)=g(x,t)=\tfrac{1}{2}e^{-t}\,e^{x}-\tfrac{1}{2}e^{t}\,e^{-x}$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(e^{x-t}-e^{-(x-t)}\right)=\mathrm{sh}(x-t)$$

ដូចនេះ តាមសមីការ (1.39) នោះយើងបាន :

$$R(x,t;1)=\frac{1}{1}\cdot\frac{d^2g(x,t;1)}{dx^2}$$
$$=\frac{d^2\left[\mathrm{sh}(x-t)\right]}{dx^2}=\mathrm{sh}(x-t)$$

ឧទាហរណ៍ ១២ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)=e^{x}+\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ដោយ $\lambda=1$ និង $K(x,t)=x-t$

នោះតាមឧទាហរណ៍ ១១ គេទាញបាន :

$$R(x,t;1)=\mathrm{sh}(x-t)=\tfrac{1}{2}\left[e^{x-t}-e^{-(x-t)}\right]$$

ដូចនេះ តាមសមីការ (1.35) យើងបានចម្លើយនៃសមីការ :

$$\varphi(x)=e^{x}+\int_0^x R(x,t;1)\,e^{t}\,dt$$
$$=e^{x}+\int_0^x \frac{e^{t}}{2}\left[e^{x-t}-e^{-(x-t)}\right]dt$$
$$=e^{x}+\tfrac{1}{2}\int_0^x (e^{x}-e^{-x}\cdot e^{2t})\,dt$$
$$=e^{x}+\tfrac{1}{2}(e^{x}\,t-\tfrac{1}{2}e^{-x}\,e^{2t})\Big|_0^x$$
$$=\tfrac{x}{2}e^{x}+\tfrac{3}{4}e^{x}+\tfrac{1}{4}e^{-x}$$

ទ្រឹស្តីបទ : សមីការអាំងតេក្រាលនៃវ៉ុលទែរ៉ាប្រភេទទីពីរ (1.29) ដែលស្នូល $K(x,t)\in L_2(\Omega_0)$ និង អនុគមន៍ $f(x)\in L_2(0,a)$ ត្រូវមានចម្លើយមួយ និងមានតែមួយគត់ក្នុងសំណុំ $L_2(0,a)$ ។

១.៤. អាំងតេក្រាលអឺឡេរីយ៉ែន (Intégrales Eulériennes)

☞ គេហៅអនុគមន៍ហ្គាម៉ាអឺឡេរីយ៉ែន (Gamma Eulérienne) ឬអាំងតេក្រាលអឺឡេរីយ៉ែនប្រភេទទីពីរ គឺជាអនុគមន៍ $\Gamma(x)$ កំណត់ដោយ :

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \qquad (1.44)$$

ដែល x ជាចំនួនកុំផ្លិចណាមួយ និង $\mathrm{Re}(x)>0$ ។

ចំពោះ $x=1$ គេបាន :

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt=1 \qquad (1.45)$$

ការប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក

$u=e^{-t} \quad \Rightarrow \quad du=-e^{-t}$

និង $dv=t^{x-1}dt \quad \Rightarrow \quad v=\dfrac{t^x}{x}$

នោះសមីការ (1.44) ទៅជា :

$$\Gamma(x)=\left.\frac{t^x e^{-t}}{x}\right|_0^{\infty}+\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^x\, dt$$

$$=0+\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^x\, dt$$

$$=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad (1.46)$$

ពីសមីការ (1.46) យើងទាញបានសមភាពនៃអនុគមន៍ហ្គាម៉ា :

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x) \qquad (1.47)$$

ដោយប្រើសមីការ (1.45) និង (1.47) យើងបាន :

$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1\cdot\Gamma(1)=1$$

$$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\cdot\Gamma(2)=2=2!$$

$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\cdot\Gamma(3)=6=3!$$

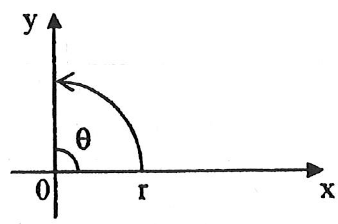
ហើយជាទូទៅចំពោះ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះគេបាន :

$$\Gamma(n)=(n-1)! \qquad (1.48)$$

☞ ឥឡូវនេះ យើងនឹងគណនា $I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

នោះ $I^2=I\times I=\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\right)$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$



រូបទី ១

យើងប្រើកូអរដោណេប៉ូលែរ $x=r\cos\theta$ និង $y=r\sin\theta$

នាំឱ្យ $x^2+y^2=r^2$ និង $dx\,dy=J\,dr\,d\theta$

ដែល Jacobian $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=r$ ។

ដោយ $D=\{(x,y)/x\ge 0, y\ge 0\}$ នោះ $\Delta=\{(r,\theta)/r\ge 0,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

ហើយ $$I^2=\int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}d(-r^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$=\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^{+\infty}\right)\left(\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (1.49)$$

យើងតាង $x = \sqrt{t} \Rightarrow x^2 = t \quad (t \geq 0)$ និង $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$

នោះសមីការ (1.49) ទៅជា :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

នាំឱ្យ
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \sqrt{\pi} \qquad (1.50)$$

តាមសមីការ (1.47) និង (1.50) យើងទាញបានតម្លៃ :

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \Gamma(\tfrac{1}{2}+1) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \Gamma(1+\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1\cdot 3\cdot\sqrt{\pi}}{2^2}$$

....

....

ជាទូទៅ យើងបានសមភាព

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad (1.51)$$

ដែល n ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន ។

ពីរូបមន្ត (1.46) យើងទាញបាន :

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

$$\Gamma(-\tfrac{5}{2}) = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15}$$

និង យើងអាចរកតម្លៃដទៃទៀត ដោយធ្វើតាមរបៀបនេះជាបន្តបន្ទាប់ ។

តាមរូបមន្ត (1.46) គេទាញបាន :

$$\Gamma(0) = \lim_{x\to 0}\Gamma(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(x+1)}{x} = \infty$$

$$\Gamma(-1) = \lim_{x\to -1}\Gamma(x) = \lim_{x\to -1}\frac{\Gamma(x+1)}{x} = \infty$$

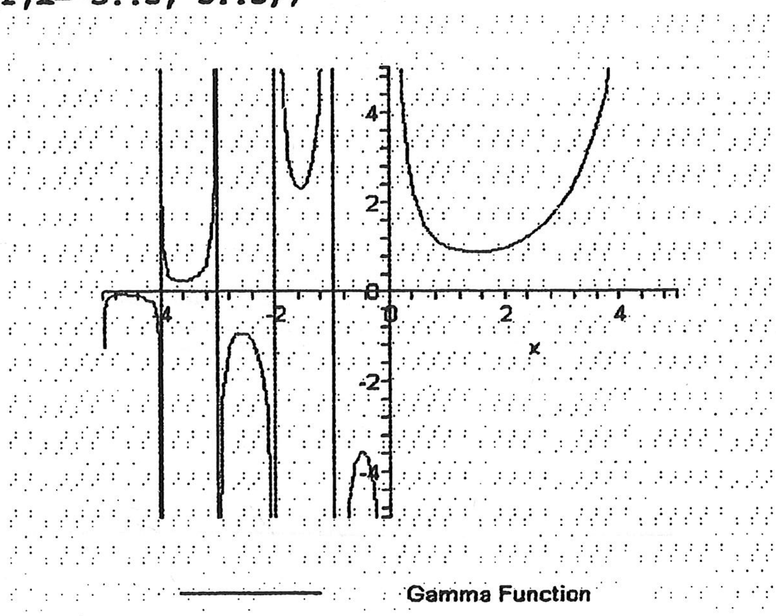
ដូចនេះ $\Gamma(0) = \Gamma(-1) = \cdots\cdots = \Gamma(-n) = \cdots = \infty$ (1.52)

អនុគមន៍ $\Gamma(x)$ (x ជាចំនួនពិត) ជាអនុគមន៍កំណត់ក្នុងកន្លះប្លង់ខាងឆ្វេងដែរ លើកលែងតែត្រង់ចំណុច $x = -n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) ។ តាមកម្មវិធី Maple យើងអាចសរសេរ និងបង្ហាញក្រាបនៃ $\Gamma(x)$ នៅពេល x ជាចំនួនពិតដូចខាងក្រោម :

```
> f:=int(t^(x-1)*exp(-t), t=0..infinity);
```

$$f := \Gamma(x)$$

```
> plot(f,x=-5..5,-5..5);
```



រូបទី ២

បើគេតាង $t = u^2$ នោះ $dt = 2u\,du$ ហើយសមីការ (1.44) ក្លាយជា :

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt=\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,(u^2)^{x-1}\, 2u\, du$$

$$=2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, u^{2x-1}\, du = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, t^{2x-1}\, dt \qquad (1.53)$$

លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ហ្គាម៉ា

$$(1).\ \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (1.54)$$

$$(2).\ \Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{2})=2^{1-2x}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(2x) \qquad (1.55)$$

$$(3).\ \Gamma(x)\,\Gamma(x+\tfrac{1}{n})\,\Gamma(x+\tfrac{2}{n})\cdots\Gamma(x+\tfrac{n-1}{n}) =$$

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx) \qquad (1.56)$$

(ទ្រឹស្តីបទផលគុណនៃ Gauss និង Legendre)

សម្រាយបញ្ជាក់

(1). ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថាសមភាព (1.54) ពិតចំពោះតម្លៃចំនួនពិតនៃ x ដែល $0<x<1$ ។ តាមលក្ខណៈនៃអនុគមន៍វិភាគ យើងអាចពង្រីកវាចំពោះតម្លៃផ្សេងទៀតនៃ x ។

ចំពោះ $0<m<1$ យើងបាន :

$$\Gamma(m)=2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, t^{2m-1}\, dt = 2\int_0^{\infty} x^{2m-1}\, e^{-x^2}\, dx$$

និង $$\Gamma(1-m)=2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, t^{2(1-m)-1}\, dt = 2\int_0^{\infty} y^{1-2m}\, e^{-y^2}\, dy$$

នាំឱ្យ

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m)=4\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} x^{2m-1}\, y^{1-2m}\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \qquad (*)$$

ដោយប្រើកូអរដោនេប៉ូលែរ (r,θ) ដែល $x=r\cos\theta$ និង $y=r\sin\theta$ នោះកន្សោម (*) ទៅជា :

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m)=4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\infty} (r\cos\theta)^{2m-1}\,(r\sin\theta)^{1-2m}\, e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 4\left(-\tfrac{1}{2}\right)\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2}\, d(-r^2) \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{1-2m}\, d\theta$$

$$= \left(-2e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} \right) \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{1-2m}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan^2\theta)^{\frac{1-2m}{2}}\, d\theta$$

តាង $x = \tan^2\theta$ នាំឱ្យ $\tan\theta = \sqrt{x}$ និង $dx = 2\tan\theta \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = 2\sqrt{x}\,(1+x)\,d\theta$

ដូចនេះ $d\theta = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$ ហើយ

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = 2\int_0^{+\infty} x^{\frac{1-2m}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^m\,(1+x)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} \quad (\text{យក } m = 1-p \Leftrightarrow p = 1-m\,;\ 0<p<1)$$

$$= \frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{\pi}{\sin(1-m)\pi} = \frac{\pi}{\sin m\pi} \quad \text{ពិត}$$

(សន្មត $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi p}$)

បន្ទាប់មក សូមអ្នកអានបង្ហាញនូវសម្រាយបញ្ជាក់នៃសមភាព (1.55) និង (1.56) ដោយខ្លួនឯង ។

☞ អនុគមន៍ហ្គាម៉ាកំណត់ដោយសមីការមធ្យម Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\tfrac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\} \qquad (1.57)$$

ដែល $\gamma = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{m}-\ln m\right) = 0.5772157\ldots$

គឺជាចំនួនថេរអឺលែរ (d' Euler) ។ សមភាព (1.57) បង្ហាញថា $\Gamma(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគចំពោះគ្រប់ z លើកលែងតែចំណុចប៉ូលងាយ ។ ពីសមីការ (1.57) យើងទទួលបានរូបមន្តអឺលែរគឺ :

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\{(1+\tfrac{1}{n})^{z}(1+\tfrac{z}{n})^{-1}\} \qquad (1.58)$$

ដែលកំណត់គ្រប់ចំណុច លើកលែងតែចំណុច $z=0, z=-1, z=-2, \ldots$ ។

☞ ឥឡូវនេះ យើងពិនិត្យអាំងតេក្រាលអឺឡេរ៉ៃយ៉ែនប្រភេទទីមួយ $B(p, q)$ ឬអនុគមន៍បេតាអឺឡេរ៉ៃយ៉ែន :

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (1.59)$$

ដែល $\mathrm{Re}(p)>0$ និង $\mathrm{Re}(q)>0$ ។

យើងតាង $x=\dfrac{y}{1+y}$ នោះយើងបាន :

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy \qquad (1.60)$$

☞ សមភាពខាងក្រោម បង្ហាញពីទំនាក់ទំនងរវាងអាំងតេក្រាលអឺឡេរ៉ៃយ៉ែនប្រភេទទីមួយ និងប្រភេទទីពីរ :

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (1.61)$$

ឧទាហរណ៍ ១៣ : គណនាអាំងតេក្រាល $I_1=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

តាង $x=a\sqrt{t} \quad (t>0)$ នាំអោយ $x^2=a^2 t$ និង $dx=\dfrac{a\,dt}{2\sqrt{t}}$ ។

គេបាន :

$$I_1=\int_0^1 a^2 t\sqrt{a^2-a^2 t}\cdot\frac{a\,dt}{2\sqrt{t}}$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{a^4}{2} B(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) = \frac{a^4\, \Gamma(\frac{3}{2})\, \Gamma(\frac{3}{2})}{2\, \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{3}{2})}$$

$$= \frac{a^4\, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{2\,(2!)} = \boxed{\frac{\pi\, a^4}{16}}$$

ឧទាហរណ៍ ១៤ : គណនាអាំងតេក្រាល $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^5}$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

តាង $t = x^5$ នាំឱ្យ $x = \sqrt[5]{t} = t^{\frac{1}{5}}$ និង $dx = \frac{1}{5} t^{\frac{1}{5}-1}\, dt$ ។

យើងបាន :

$$I_2 = \frac{1}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{5}-1}\, dt}{(1+t)^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}} = \frac{1}{5} B(\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5})$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{5})\, \Gamma(\frac{4}{5})}{5\, \Gamma(\frac{1}{5} + \frac{4}{5})} = \frac{1}{5} \Gamma(\tfrac{1}{5})\, \Gamma(1 - \tfrac{1}{5}) \quad (\text{ ព្រោះ } \Gamma(1) = 1 \text{ })$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{5 \sin \frac{\pi}{5}}}$$

១.៥. សមីការអាំងតេក្រាលអាបែល និង ភាពទូទៅ

(Equation Intégrale d'Abel et sa Généralisation)

☞ គេហៅសមីការអាំងតេក្រាលអាបែល គឺជាសមីការដែលមានរាង :

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt = f(x) \qquad (1.62)$$

ដែល $\varphi(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវកំណត់ និង $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលគេឱ្យ ។ វាគឺជាសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលតេរ៉ា ប្រភេទទីមួយ ។

☞ គេហៅសមីការសមភាពអាបែល ឬសមីការអាបែលទូទៅ គឺជាសមីការដែលមានទម្រង់ទូទៅ :

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt = f(x) \qquad (1.63)$$

ដែល α ជាចំនួនថេរ ($0<\alpha<1$) ។ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេជាប់លើអង្គត់ $[0, a]$ ។ យើងឃើញថា ចំពោះ $\alpha \ge \frac{1}{2}$ នោះអនុគមន៍ស្នូលនៃសមីការ (1.63) មិនមានការអាំងតេក្រាល មានន័យថាវាមិនមានអនុគមន៍នៃ L_2 ។ សមីការ (1.63) មានចម្លើយមួយ ដែលអាចរកតាមវិធីដូចខាងក្រោម ។

យើងឃើញថាសមីការ (1.63) មានចម្លើយមួយ ។ យើងជំនួស x ដោយ s ក្នុងសមីការ (1.63) រួចយើងគុណអង្គទាំងពីរដោយ $\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ និងបន្ទាប់មកយើងធ្វើអាំងតេក្រាលធៀបនឹង s លើចន្លោះ $[0, x]$:

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}\,dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds$$

យើងផ្លាស់ប្តូរលំដាប់អាំងតេក្រាលក្នុងអង្គទីមួយ យើងបាន :

$$\int_0^x \varphi(t)dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = F(x) \qquad (1.64)$$

ដែល $F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds$ ។

យើងតាង $s = t + y(x-t)$ នោះ $ds = (x-t)dy$ និង

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{(x-t)\,dy}{(1-y)^{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}y^\alpha(x-t)^\alpha}$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha(1-y)^{1-\alpha}}$$

$$= \int_0^1 y^{(1-\alpha)-1}(1-y)^{\alpha-1}dy$$

$$= B(1-\alpha, \alpha) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \quad (\Gamma(1) = 1)$$

ពីសមីការ (1.64) យើងបាន :

$$\int_0^x \varphi(t)\, dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} F(x)$$

នាំឱ្យ $\varphi(x) = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\pi} F'(x)$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right) \qquad (1.65)$$

យើងប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក

$$u = f(s) \quad \Rightarrow \quad du = f'(s)\, ds$$

និង $dv = \dfrac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \quad \Rightarrow \quad v = -\dfrac{(x-s)^\alpha}{\alpha}$

ដូចនេះ

$$\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds = -\frac{(x-s)^\alpha}{\alpha} f(s)\Big|_0^x + \frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-s)^\alpha f'(s)\, ds$$

$$= \frac{x^\alpha}{\alpha} f(0) + \frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-s)^\alpha f'(s)\, ds$$

និង $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right) = \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{\alpha} f(0) + \dfrac{\alpha}{\alpha}\displaystyle\int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f'(s)\, ds$

$$= \frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

តាមសមីការ (1.65) យើងបានចម្លើយនៃសមីការ (1.63) គឺ :

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right] \qquad (1.66)$$

ឧទាហរណ៍ ១៥ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dx}{(x-t)^{\alpha}} = x^n \qquad (0<\alpha<1)\ \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x)=x^n$ នាំឱ្យ $f'(x)=nx^{n-1}$ និង $f(0)=0$ ។

គេបាន :

$$\int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds = \int_0^x \frac{ns^{n-1}}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds$$

តាង $s=xy \Rightarrow ds=x\,dy$ ហើយ

$$\int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds = \int_0^x \frac{n(xy)^{n-1}}{(x-xy)^{1-\alpha}}\,x\,dy$$

$$= \frac{nx^n}{x^{1-\alpha}}\int_0^1 \frac{y^{n-1}\,dy}{(1-y)^{1-\alpha}}$$

$$= nx^{n+\alpha-1}\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{\alpha-1}\,dy$$

$$= nx^{n+\alpha-1}B(n,\alpha)$$

$$= nx^{n+\alpha-1}\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}$$

តាមរូបមន្ត (1.66) យើងបានចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលគឺ :

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{0}{x^{1-\alpha}} + nx^{n+\alpha-1}\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\right]$$

$$= \frac{nx^{n+\alpha-1}\sin\alpha\pi\,\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha)}{\pi\,\Gamma(n+\alpha)}$$

ប៉ុន្តែ $n\Gamma(n)=\Gamma(n+1)$ និង $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{\sin\pi\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\pi}=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$

ដូចនេះ $$\varphi(x)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}$$

☞ យើងពិនិត្យសមីការអាំងតេក្រាល

$$\int_0^x (x-t)^{\beta}\varphi(t)\,dt = x^{\lambda} \tag{1.67}$$

ដែល $\lambda \ge 0$ និង $\beta > -1$ ជាចំនួនពិត ។ សមីការ (1.67) ជាសមីការអាំងតេក្រាលអាបែលទូទៅដែរ ។

យើងគុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1.67) ដោយ $(z-x)^{\mu}$ $(\mu > -1)$ ហើយយើងធ្វើអាំងតេក្រាលធៀបនឹង x លើចន្លោះ $[0, z]$:

$$\int_0^z (z-x)^{\mu}\left(\int_0^x (x-t)^{\beta}\varphi(t)\,dt\right)dx = \int_0^z x^{\lambda}(z-x)^{\mu}\,dx \tag{1.68}$$

យើងតាង $x=\rho z$ សម្រាប់អាំងតេក្រាលខាងស្តាំ នោះយើងបាន : $dx = z\,d\rho$ និង

$$\int_0^z x^{\lambda}(z-x)^{\mu}\,dx = z^{\lambda+\mu+1}\int_0^1 \rho^{\lambda}(1-\rho)^{\mu}\,d\rho$$

$$= z^{\lambda+\mu+1}B(\lambda+1,\mu+1)$$

$$= z^{\lambda+\mu+1}\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} \tag{1.69}$$

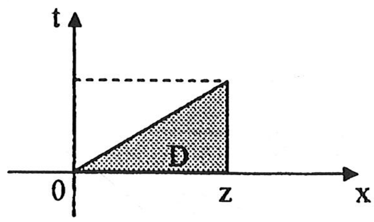
ដែល $\lambda+\mu+1>\lambda\ge 0$ ។

ដោយប្តូរលំដាប់អាំងតេក្រាលក្នុងអង្គទីមួយនៃសមីការ (1.68) នោះយើងបាន :

$$\int_0^z (z-x)^{\mu}\left(\int_0^x (x-t)^{\beta}\varphi(t)\,dt\right)dx = \int_0^z\left(\int_0^x (z-x)^{\mu}(x-t)^{\beta}\varphi(t)\,dt\right)dx$$

$$= \int_0^z\left(\int_t^z (z-x)^{\mu}(x-t)^{\beta}\,dx\right)\varphi(t)\,dt \tag{1.70}$$

រូបទី ៣



$$D = \{(t, x) \,/\, 0 \le t \le x \le z\}$$

យើងតាង $x = t + \rho(z-t)$ នោះ $dx = (z-t)d\rho$ ហើយ

$$\int_t^z (z-x)^{\mu}(x-t)^{\beta}dx = (z-t)^{\mu+\beta+1}\int_0^1 \rho^{\beta}(1-\rho)^{\mu}d\rho$$

$$= (z-t)^{\mu+\beta+1}B(\beta+1, \mu+1)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)}(z-t)^{\mu+\beta+1} \qquad (1.71)$$

ពីសមីការ (1.69), (1.70) និង (1.71) នោះយើងបានសមីការ (1.68) ក្លាយជា :

$$\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)}\int_0^z (z-t)^{\mu+\beta+1}\varphi(t)\,dt = z^{\lambda+\mu+1}\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}$$

ឬ $$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)}\int_0^z (z-t)^{\mu+\beta+1}\varphi(t)\,dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\,z^{\lambda+\mu+1} \qquad (1.72)$$

យើងជ្រើសរើស μ ដែល $\mu+\beta+1 = n$ និង n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។ នោះសមីការ (1.72) អាចសរសេរជា :

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\int_0^z (z-t)^{n}\varphi(t)\,dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)}\,z^{\lambda+n-\beta}$$

ឬ $$\int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\lambda+n-\beta+1)}\,z^{\lambda+n-\beta} \qquad (1.73)$$

យើងធ្វើដេរីវេ $n+1$ ដងធៀបទៅនឹង z លើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1.73) នោះយើងបាន :

$$\varphi(z)=\frac{\Gamma(\lambda+1)\cdot(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)\cdots(\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\lambda+n-\beta+1)}z^{\lambda-\beta-1}$$

បើ $\lambda-\beta+k\neq 0$ ($k=0,1,2,...,n$) នោះ

$$\Gamma(\lambda+n-\beta+1)=(\lambda+n-\beta)\,\Gamma(\lambda+n-\beta)$$

$$=(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)\cdots(\lambda-\beta)\,\Gamma(\lambda-\beta)$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាល (1.67) គឺ :

$$\varphi(z)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\lambda-\beta)}z^{\lambda-\beta-1} \qquad (1.74)$$

ឧទាហរណ៍ ១៦ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt=x^2 \quad ។$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សមីការខាងលើមាន $\beta=1$ និង $\lambda=2$

នាំឱ្យ $\lambda-\beta+k=1+k\neq 0$ គ្រប់ $k=0,1,2,...,n$ ។

តាមរូបមន្ត (1.74) យើងបានចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលគឺ :

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(1+1)\,\Gamma(2-1)}x^{2-1-1}$$

$$=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\,\Gamma(1)}=\boxed{2}$$

ឧទាហរណ៍ ១៧ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}}\varphi(t)\,dt=x^{\frac{4}{3}}-x^2 \qquad (*)$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងតាង $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(*)$ ដែល $\varphi_1(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

$$\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}}\varphi(t)\,dt = x^{\frac{4}{3}} \qquad (**)$$

និង $\varphi_2(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

$$\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}}\varphi(t)\,dt = -x^2 \qquad (***)$$

☞ យើងនឹងកំណត់ $\varphi_1(x)$ ចំពោះសមីការ $(**)$ ។

ដោយ $\beta=\frac{1}{3}$ និង $\lambda=\frac{4}{3}$ នាំឱ្យ $\lambda-\beta+k\neq 0$ គ្រប់ $k=0,1,2,\dots,n$ ។

តាមរូបមន្ត (1.74) នោះយើងបានចម្លើយនៃសមីការ $(**)$ គឺ :

$$\varphi_1(x)=\frac{\Gamma(\frac{4}{3}+1)}{\Gamma(\frac{1}{3}+1)\,\Gamma(\frac{4}{3}-\frac{1}{3})}x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-1}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})\,\Gamma(1)}x^0=\frac{4}{3}$$

☞ ចំពោះសមីការ $(***)$ មាន $\beta=\frac{1}{3}$ និង $\lambda=2$

នាំឱ្យ $\lambda-\beta+k\neq 0$ គ្រប់ $k=0,1,2,\dots,n$ ។

តាមរូបមន្ត (1.74) នោះយើងបានចម្លើយនៃសមីការ $(***)$ គឺ :

$$\varphi_2(x)=-\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(\frac{1}{3}+1)\,\Gamma(2-\frac{1}{3})}x^{2-\frac{1}{3}-1}$$

$$=\frac{-2}{\Gamma(\frac{4}{3})\,\Gamma(\frac{5}{3})}x^{\frac{2}{3}}$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ $(*)$ គឺ :

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=\frac{4}{3}-\frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{5}{3})}x^{\frac{2}{3}}$$

លំហាត់ជំពូកទី ១

ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលដែលមានភ្ជាប់ជាមួយ :

1.1 $\varphi(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$; $\varphi(x)=\dfrac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2}-\int_0^x \dfrac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2}\varphi(t)\,dt$

1.2 $\varphi(x)=e^x(\cos e^x-e^x\sin e^x)$;
$\varphi(x)=(1-xe^{2x})\cos 1-e^{2x}\sin 1+\int_0^x[1-(x-t)e^{2x}]\varphi(t)\,dt$

2.3 $\varphi(x)=xe^x$; $\varphi(x)=e^x\sin x+2\int_0^x\cos(x-t)\varphi(t)\,dt$

1.4 $\varphi(x)=x-\dfrac{x^3}{6}$; $\varphi(x)=x-\int_0^x sh(x-t)\varphi(t)\,dt$

1.5 $\varphi(x)=3$; $x^3=\int_0^x(x-t)^2\varphi(t)\,dt$

1.6 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}$; $\int_0^x\dfrac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt=\sqrt{x}$

1.7 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{x}}$; $\int_0^x\dfrac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt=1$

ចូរបង្កើតសមីការអាំងតេក្រាលចំពោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ជាមួយល័ក្ខខ័ណ្ឌដើមដែលគេបានឱ្យ :

1.8 $y''+y=0;\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$

1.9 $y'-y=0;\ \ y(0)=1$

1.10 $y''+y=\cos x;\ \ y(0)=y'(0)=0$

1.11 $y''-5y'+6y=0;\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$

1.12 $y''+y=\cos x;\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$

1.13 $y''-y'\sin x+e^x y=x;\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=-1$

1.14 $y''+(1+x^2)y=\cos x;\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=2$

1.15 $y'''+x\,y''+(x^2-x)\,y=x\,e^x+1;\quad y(0)=y'(0)=1,\quad y''(0)=0$

1.16 $y'''-2x\,y=0;\quad y(0)=\frac{1}{2},\quad y'(0)=y''(0)=1$

1.17 បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ ដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ អាចសរសេរជាសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ូលទែរ៉ាប្រភេទទីពីរ ដែលមានស្នូលមិនមែនជាអនុគមន៍ផលដក នៃ x − t (សមីការកុងវ៉ូលុយស្យុង) ទេ ។

ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាលខាងក្រោមតាមការគណនាដេរីវេ :

1.18 $\varphi(x)=x-\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt$

1.19 $\int_0^x e^{x+t}\,\varphi(t)\,dt=x$

1.20 $\int_0^x e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt=x$

1.21 $\varphi(x)=2\int_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2}\,\varphi(t)\,dt+1$

1.22 $\varphi(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt+e^x$

រករ៉េស្ទុលវ៉ង់នៃសមីការអាំងតេក្រាលវ៉ូលទែរ៉ា ដែលមានស្នូលដូចតទៅ :

1.23 $K(x,\ t)=x-t$

1.24 $K(x,\ t)=e^{x-t}$

1.25 $K(x,\ t)=e^{x^2-t^2}$

1.26 $K(x,\ t)=\frac{1+x^2}{1+t^2}$

1.27 $K(x,\ t)=\frac{2+\cos x}{2+\cos t}$

1.28 $K(x,\ t)=\frac{ch\,x}{ch\,t}$

1.29 $K(x,\ t)=a^{x-t}\quad (a>0)$

រករ៉េសូលវ៉ង់នៃសមីការអាំងតេក្រាលដែលមានស្នូល និង $\lambda=1$ ដូចខាងក្រោម :

1.30 $K(x,\ t)=2-(x-t)$

1.31 $K(x,\ t)=-2+3(x-t)$

1.32 $K(x,\ t)=2x$

1.33 $K(x,\ t)=-\dfrac{4x-2}{2x+1}+\dfrac{8(x-t)}{2x+1}$

1.34 សមីការអាំងតេក្រាលវ៉ុលទែរ៉ាដែលមានស្នូលរបស់វាមិនអាស្រ័យនឹងផលដកនៃអំណះអំណាងវា :

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x K(x-t)\ \varphi(t)\,dt\quad (\lambda=1)\qquad (*)$$

បង្ហាញថា វាមានតម្លៃដូចគ្នានៃគ្រប់ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ និងរ៉េសូលវ៉ង់នៃសមីការ $(*)$ ។

រកចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1.35 $\varphi(x)=e^x+\int_0^x e^{x-t}\ \varphi(t)\,dt$

1.36 $\varphi(x)=\sin x+2\int_0^x e^{x-t}\ \varphi(t)\,dt$

1.37 $\varphi(x)=x3^x-\int_0^x 3^{x-t}\ \varphi(t)\,dt$

1.38 $\varphi(x)=e^x\sin x+\int_0^x \dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}\varphi(t)\,dt$

1.39 $\varphi(x)=1-2x-\int_0^x e^{x^2-t^2}\ \varphi(t)\,dt$

1.40 $\varphi(x)=e^{x^2+2x}+2\int_0^x e^{x^2-t^2}\ \varphi(t)\,dt$

1.41 $\varphi(x)=1+x^2+\int_0^x \dfrac{1+x^2}{1+t^2}\varphi(t)\,dt$

1.42 បង្ហាញថាសមីការ $\varphi(x)=\int_0^x t^{x-t}\ \varphi(t)\,dt\quad (0\le x,\quad t\le 1)$ មានចម្លើយជាប់ $\varphi(x)\equiv 0$ បូកជាមួយចម្លើយដាច់មិនកំណត់ $\varphi(x)=C\,x^{x-1}$ ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយ ។

1.43 បង្ហាញថា $\Gamma'(1)=-\alpha$ ។

1.44 បង្ហាញថា នៅពេលដែល $\text{Re}(z)>0$ នោះគេបាន : $\Gamma(z)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx$ ។

1.45 បង្ហាញថា $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=2\ln 2$ ។

1.46 បង្ហាញថារូបមន្ត $\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2.....(n-1)}{z(z+1)....(z+n-1)}n^z$ ។

1.47 បង្ហាញថា $B(p,\, q)=B(q,\, p)$ ។

1.48 បង្ហាញថា $B(p,\, q)=B(p+1, q)+B(p, q+1)$ ។

1.49 បង្ហាញថា $B(p+1,\, q)=\frac{p}{q}B(p, q+1)$ ។

1.50 បង្ហាញថា $\int_{-1}^{1}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=2^{p+q-1}B(p,\, q)$ ។

1.51 គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\pi/2}\cos^{m-1}x\,\sin^{n-1}x\,dx \quad (\text{Re}\,m>0,\ \text{Re}\,n>0)$ ។

1.52 (a). បង្ហាញថា បើ $f(x)\equiv C$ (ចំនួនថេរ) នោះសមីការអាបែល (1.62) មានចម្លើយជាអនុគមន៍ស៊ីក្លូអ៊ីតមួយ ។

(b). បង្ហាញថាក្នុងករណី $f(x)\equiv\frac{C}{\sqrt{x}}$ នោះចម្លើយនៃសមីការអាបែល គឺជាបន្ទាត់ ។

ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1.53 $\int_0^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt=x^n \quad (0<\alpha<1)$

1.54 $\int_0^x\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt=\sin x$

1.55 $\int_0^x\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt=e^x$

1.56 $\int_0^x\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt=\sqrt{x}$

1.57 ដោះស្រាយសមីការអាបែល ដែលមានវិមាត្រពីរគឺ

$$\iint_D \frac{\varphi(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}} = f(x_0,y_0)$$

ដែលដែនកំណត់ D ជាត្រីកោណកែងសមបាត ដែលមានអ៊ីប៉ូតេនុសស្រួចជាមួយអ័ក្ស OX និងកំពូលនៅត្រង់ចំណុច (x_0, y_0) ។

ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

1.58 $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}}\varphi(t)\,dt = x^{\frac{4}{3}} - x^2$

1.59 $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)\,dt = \pi x$

1.60 $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{4}}\varphi(t)\,dt = x + x^2$

1.61 $\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = x^3$

1.62 $\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

ជំពូកទី ២

សមីការអាំងតេក្រាលហ្វ្រេដហូម
(Équations Intégrales de Fredholm)

២.១~ សញ្ញាណដំបូង (Notions Fondamentales)

☞ គេហៅសមីការអាំងតេក្រាលលីនេអ៊ែរនៃហ្វ្រេដហូម ប្រភេទទីពីរគឺជាសមីការដែលមានរាង:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=f(x) \qquad (2.1)$$

ដែល $\varphi(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវកំណត់ (អនុគមន៍អញ្ញាត), $K(x,t)$ និង $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលគេឱ្យ ហើយ x និង t ជាពីរអថេរពិតយកតម្លៃលើចន្លោះ (a, b) និង λ ជាកត្តាលេខ ។

☞ អនុគមន៍ $K(x,t)$ ជាអនុគមន៍ស្នូល (noyau) នៃសមីការអាំងតេក្រាល (2.1) ។ គេឧបមាថាអនុគមន៍ស្នូល $K(x,t)$ កំណត់ក្នុងការេ $\Omega=\{(x,t)\,/\,a\le x\le b,\ a\le t\le b\}$ នៃប្លង់ (x,t) និងជាប់លើ Ω ឬអាចជាអនុគមន៍ដាច់ ដែលអាំងតេក្រាល

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt$$

កំណត់បាន ។

បើ $f(x)\neq 0$ នោះសមីការ (2.1) ហៅថាជា *សមីការមិនអូម៉ូសែន* (non homogène) ។ ក្នុងករណីផ្ទុយមកវិញ នោះសមីការអាំងតេក្រាល (2.1) សរសេរជា :

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0 \qquad (2.2)$$

និងគេហៅថាជា *សមីការអូម៉ូសែន* (homogène) ។

សមីការអាំងតេក្រាលមានរាង

$$\int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt = f(x) \qquad (2.3)$$

ដែលអនុគមន៍អញ្ញាត $\varphi(x)$ មិនរងនូវសញ្ញានៃអាំងតេក្រាល ។ សមីការ (2.3) ហៅថាជា *សមីការអាំងតេក្រាលប្រេដ្ហូម ប្រភេទទីមួយ* ។ គោល a និង b ក្នុងសមីការ (2.1), (2.2) និង (2.3) អាចជាចំនួនកំណត់ ឬជាចំនួនមិនកំណត់ផងដែរ ។

គេហៅថាជា ចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាល (2.1), (2.2) និង (2.3) គឺគ្រប់អនុគមន៍ $\varphi(x)$ ដែលវាផ្ទៀងផ្ទាត់តាមការជំនួសក្នុងសមីការចំពោះ $x \in (a, b)$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : បង្ហាញថាអនុគមន៍ $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ ជាចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលប្រេដ្ហូម

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt = \frac{x}{2} \qquad (2.4)$$

ដែលអនុគមន៍ស្នូលមានទម្រង់

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2} & \text{បើ } 0 \le x \le t \\ \dfrac{t(2-x)}{2} & \text{បើ } t \le x \le 1 \end{cases}$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងបាន :

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt = \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\Big\{\int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt + \int_x^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt\Big\}$$

$$= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\Big\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)\,dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)\,dt\Big\}$$

$$= \sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4}\Big\{\frac{2-x}{2}\int_0^x t\sin\frac{\pi t}{2}\,dt + \frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)\sin\frac{\pi t}{2}\,dt\Big\}$$

$$=\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\{(2-x)(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2})\Big|_{t=0}^{t=x}+x(-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2})\Big|_{t=x}^{t=1}\}$$

$=\frac{x}{2}$ ពិត

មានន័យថា $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (2.4) ។

ដូចនេះវាជាចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលនេះ ។

ឧទាហរណ៍ ២ : បង្ហាញថាអនុគមន៍ $\varphi(x)=xe^{-x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលប្រេដ៏ដូម

$$\varphi(x)-4\int_0^{+\infty}e^{-(x+t)}\varphi(t)dt=(x-1)e^{-x} \qquad (2.5)$$

ដំណោះស្រាយ

យើងយកតម្លៃ $\varphi(x)=xe^{-x}$ ជំនួសចូលក្នុងអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ (2.5) យើងបាន :

$$\varphi(x)-4\int_0^{+\infty}e^{-(x+t)}\varphi(t)dt=xe^{-x}-4\int_0^{+\infty}e^{-(x+t)}te^{-t}dt$$

$$=xe^{-x}-4e^{-x}\int_0^{+\infty}te^{-2t}dt \qquad (*)$$

យើងយក

$u=t \quad \Rightarrow \quad du=dt$

និង $dv=e^{-2t}dt \quad \Rightarrow \quad v=-\frac{1}{2}e^{-2t}$

នាំឱ្យ $\int_0^{+\infty}te^{-2t}dt=-\frac{t}{2}e^{-2t}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-2t}dt$

$$=0+\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2t}}{2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=-\frac{1}{4}(0-1)=\frac{1}{4}$$

ពីសមីការ (*) យើងបាន :

$$\varphi(x)-4\int_0^{+\infty} e^{-(x+t)}\varphi(t)dt = x e^{-x}-4e^{-x}\left(\frac{1}{4}\right)=(x-1)e^{-x} \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\varphi(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (2.5) ។

២.២-វិធីសាស្ត្រប្រេដហ្វូម (Méthode de Fredholm)

ចម្លើយនៃសមីការប្រេដហ្វូម ប្រភេទទីពីរ

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)dt = f(x)$$

គឺកំណត់ដោយរូបមន្ត

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x, t; \lambda)\, f(t)\, dt \qquad (2.6)$$

ដែលអនុគមន៍ $R(x, t; \lambda)$ ហៅថាជាវ៉េសូលវ៉ង់ប្រេដហ្វូមនៃសមីការ (2.1) ហើយវាកំណត់ដោយសមភាព

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \qquad (2.7)$$

ដែលមានល័ក្ខខ័ណ្ឌ $D(\lambda)\neq 0$ ។ នៅក្នុងនោះ $D(x, t; \lambda)$ និង $D(\lambda)$ ជាស៊េរីដែលមានស្វ័យគុណនៃ λ :

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\,\lambda^n \qquad (2.8)$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\,\lambda^n \qquad (2.9)$$

ជាមួយមេគុណកំណត់ដោយ

$$B_n(x,t)=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \cdots & K(x,t_n)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_n)\\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & \cdots & K(t_2,t_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \cdots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix} dt_1\ldots dt_n \qquad (2.10)$$

$$B_0(x, t) = K(x, t)$$

និង

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \cdots & K(t_2,t_n) \\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & \cdots & K(t_3,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n \quad (2.11)$$

អនុគមន៍ $D(\lambda)$ និង $D(x, t; \lambda)$ ជាដេទែរមីណង់ប្រេដូម និងជាមីន័រនៃដេទែរមីណង់ប្រេដូមរៀងគ្នា ។ បើស្នូល $K(x, t)$ ជាអនុគមន៍ទាល់ ឬ បើអាំងតេក្រាល

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt$$

ជាចំនួនកំណត់ នោះស៊េរី (2.8) និង (2.9) រួមចំពោះគ្រប់ λ ហើយដូចនេះវាជាអនុគមន៍វិភាគនៃ λ ។

រ៉េសូលវ៉ង់ $$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

ជាអនុគមន៍វិភាគនៃ λ លើកលែងតែតម្លៃ λ ដែល $D(\lambda) = 0$ ។ តម្លៃ λ ជាប៉ូលនៃរ៉េសូលវ៉ង់ $R(x, t; \lambda)$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣ :

ក- ដោយប្រើដេទែរមីណង់ប្រេដូម ចូរកំណត់រ៉េសូលវ៉ង់នៃស្នូល $K(x, t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$ ។

ខ- បើ $f(x) = e^{-x}$ ចូរកំណត់ $\varphi(x)$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក- កំណត់ $R(x, t; \lambda)$

គេបាន $B_0(x, t) = xe^t$

$$B_1(x, t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0$$

$$B_2(x,t)=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} x e^{t} & x e^{t_1} & x e^{t_2} \\ t_1 e^{t} & t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t} & t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2}\end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = 0$$

ពីព្រោះដេទែរមីណង់ក្រោមសញ្ញា $\int$ ស្មើសូន្យ ។ ជាបន្តបន្ទាប់វាក៏បង្ហាញថាគ្រប់ $B_n(x,t)$ ស្មើសូន្យផងដែរ ។ យើងរកមេគុណ C_n :

$$C_1=\int_0^1 K(t_1,t_1)\,dt_1=\int_0^1 t_1 e^{t_1}\,dt_1=1$$

$$C_2=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2}\end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = 0$$

ដោយប្រើសម្រាយតាមកំណើន យើងបាន $C_n=0$ គ្រប់ $n\geq 2$ ។

តាមរូបមន្ត (2.8) និង (2.9) យើងបាន :

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)=B_0(x,t)=x e^{t}$$

និង $$D(\lambda)=1+\frac{(-1)^1}{1!}C_1\lambda^1=1-\lambda$$ ។

តាមរូបមន្ត (2.7) នោះគេបានរ៉េស្វលវ៉ង់គឺ

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}=\frac{x e^{t}}{1-\lambda}$$

ខ-កំណត់ $\varphi(x)$

សមីការ (2.1) អាចសរសេរ

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 x e^{t}\varphi(t)\,dt=f(x) \qquad (\lambda\neq 1)$$

ដែលមានចម្លើយជាសមីការ (2.6) គឺ

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{x e^{t}}{1-\lambda}f(t)\,dt$$

បើ $f(x)=e^{-x}$ គេបាន

$$\varphi(x)=e^{-x}+\frac{\lambda x}{1-\lambda}\int_0^1 e^{t}e^{-t}\,dt$$

ឬ $$\varphi(x)=e^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}x$$

ឧទាហរណ៍ ៤ :

ក- បង្ហាញថាក្នុងករណីសមីការ

$$\varphi(x)=x+\lambda\int_0^1 x\,t\,\varphi(t)\,dt \qquad (*)$$

មានដេទែរមីណង់ប្រេដូម $D(\lambda)=1-\dfrac{\lambda}{3}$ និងមីនីរនៃដេទែរមីណង់ប្រេដូម $D(x,t;\lambda)=x\,t$ ។

ខ- ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល (*) ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក- បង្ហាញថា $D(\lambda)=1-\dfrac{\lambda}{3}$ និង $D(x,t;\lambda)=x\,t$ ។

យើងមាន $K(x,t)=x\,t$; $a=0$ និង $b=1$ ។

យើងបាន $B_0(x,t)=x\,t$

$$B_1(x,t)=\int_0^1\begin{vmatrix} x\,t & x\,t_1\\ t_1\,t & t_1\,t_1\end{vmatrix}dt_1=\int_0^1(x\,t\,t_1^2-x\,t\,t_1^2)\,dt_1=0$$

$$B_2(x,t)=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} x\,t & x\,t_1 & x\,t_2\\ t_1\,t & t_1\,t_1 & t_1\,t_2\\ t_2\,t & t_2\,t_1 & t_2\,t_2\end{vmatrix}dt_1\,dt_2$$

$$=t\,t_1\,t_2\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} x & x & x\\ t_1 & t_1 & t_1\\ t_2 & t_2 & t_2\end{vmatrix}dt_1\,dt_2$$

$$=t\,t_1\,t_2\,x\,t_1\,t_2\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}dt_1\,dt_2=0$$

ដោយធ្វើជាបន្តបន្ទាប់ យើងទាញបានតាមកំណើនគឺ $B_n(x,t)=0$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 2$ ។ យើងរកមេគុណ C_n :

$$C_1=\int_0^1 K(t_1,t_1)\,dt_1=\int_0^1 t_1^2\,dt_1=\frac{t_1^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$C_2=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} t_1\,t_1 & t_1\,t_2\\ t_2\,t_1 & t_2\,t_2\end{vmatrix}dt_1\,dt_2=0$$

$$C_3=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} t_1 t_1 & t_1 t_2 & t_1 t_3 \\ t_2 t_1 & t_2 t_2 & t_2 t_3 \\ t_3 t_1 & t_3 t_2 & t_3 t_3 \end{vmatrix} dt_1\, dt_2\, dt_3$$

$$=t_1 t_2 t_3\int_0^1\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} dt_1\, dt_2\, dt_3=0$$

ជាបន្ត យើងទាញបាន $C_n=0$ គ្រប់ $n\geq 2$ ។

តាមរូបមន្ត (2.8) និង (2.9) យើងបាន :

$$D(x,t;\ \lambda)=K(x,\ t)=B_0(x,t)=x\,t \quad \text{ពិត}$$

និង
$$D(\lambda)=1+\frac{(-1)^1}{1!}C_1\,\lambda^1=1-\frac{\lambda}{3} \quad \text{ពិត ។}$$

ខ- ដោះស្រាយរក $\varphi(x)$

សមីការអាំងតេក្រាល (*) មានចម្លើយ

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 R(x,\ t;\ \lambda)\ f(t)\ dt \qquad (\text{តាមសមីការ}\ (2.6))$$

ប៉ុន្តែ $f(x)=x$ និង $R(x,t;\ \lambda)=\dfrac{x\,t}{1-\frac{\lambda}{3}}$ ($\lambda\neq 3$) ។

នាំឱ្យ
$$\varphi(x)=x+\lambda\int_0^1\frac{x\,t}{1-\frac{\lambda}{3}}\,t\ dt$$

$$=x+\frac{\lambda x}{1-\frac{\lambda}{3}}\ \frac{t^3}{3}\bigg|_0^1=x+\frac{\lambda x}{1-\frac{\lambda}{3}}\left(\frac{1}{3}-0\right)$$

$$=x+\frac{\lambda x}{3-\lambda}=\frac{3x}{3-\lambda}$$

ការគណនាមេគុណ $B_n(x,\ t)$ និង C_n នៃស៊េរី (2.8) និង (2.9) តាមរូបមន្ត (2.10) និង (2.11) គឺមិនអាចធ្វើទៅបាននៅក្នុងករណីខ្លះ ប៉ុន្តែរូបមន្តទាំងនេះអាចសរសេរជាទំនាក់ទំនងកំណើនដូចតទៅ :

$$B_n(x,\ t)=C_n\,K(x,\ t)-n\int_a^b K(x,\ s)\,B_{n-1}(s,\ t)\,ds \qquad (2.12)$$

និង $$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s, s)ds \qquad (2.13)$$

ដែល $C_0 = 1$ និង $B_0(x, t) = K(x, t)$ ។ រូបមន្ត (2.12) និង (2.13) អាចកំណត់រកតម្លៃ C_1, $B_1(x, t)$, C_2, $B_2(x, t)$, C_3 និងបន្តបន្ទាប់ទៀត ។

ឧទាហរណ៍ ៥ : ដោយប្រើរូបមន្ត (2.12) និង (2.13) ចូរកំណត់រ៉េសូលវ៉ង់នៃស្នូល $K(x, t) = x - 2t$ ដែល $0 \le x \le 1$ និង $0 \le t \le 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $C_0 = 1$ និង $B_0(x, t) = K(x, t) = x - 2t$ ។

ដោយប្រើរូបមន្ត (2.13) គេបាន

$$C_1 = \int_0^1 B_0(s, s)\, ds = \int_0^1 (-s)ds = -\frac{1}{2}$$

តាមរូបមន្ត (2.12) យើងបាន

$$\begin{aligned} B_1(x, t) &= C_1 K(x, t) - \int_0^1 K(x, s)B_0(s, t)\, ds \\ &= -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t)\, ds \\ &= -x - t + 2xt + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ការធ្វើបន្ត

$$C_2 = \int_0^1 (-2s + 2s^2 + \frac{2}{3})\, ds = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} B_2(x, t) &= C_2 K(x, t) - 2\int_0^1 K(x, s)B_1(s, t)\, ds \\ &= \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2s)(-s-t+2st+\tfrac{2}{3})\, ds = 0 \end{aligned}$$

$$C_3 = \int_0^1 B_2(s, s)\, ds = 0$$

$$B_3(x, t) = C_3 K(x, t) - 3\int_0^1 K(x, s)B_2(s, t)\, ds = 0$$

$$C_3 = C_4 = \cdots = 0 \text{ និង } B_3(x,t) = B_4(x,t) = \cdots = 0 \text{ ។}$$

តាមរូបមន្ត (2.8) និង (2.9) យើងបាន

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\,\lambda^n$$

$$= x - 2t + \frac{(-1)^1}{1!} B_1(x,t)\,\lambda^1$$

$$= x - 2t + (x + t - 2xt - \tfrac{2}{3})\lambda$$

និង
$$D(\lambda) = 1 + \frac{(-1)^1}{1!} C_1 \lambda^1 + \frac{(-1)^2}{2!} C_2 \lambda^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{6}\lambda^2$$

ដូចនេះរ៉េស្ទូលវ៉ង់គឺ

$$R(x,t;\lambda) = \frac{x - 2t + (x + t - 2xt - \frac{2}{3})\lambda}{1 + \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda^2}{6}}$$

ឧទាហរណ៍ ៦ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t\,\varphi(t)\,dt = \cos 2x \qquad (*)$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

សមីការ (*) មាន $\lambda = 1$, $K(x,t) = \sin x \cos t$, $f(x) = \cos 2x$, $a = 0$ និង $b = 2\pi$ ។

នាំឱ្យ $C_0 = 1$ និង $B_0(x,t) = K(x,t) = \sin x \cos t$ ។

ដោយប្រើរូបមន្ត (2.13) យើងបាន

$$C_1 = \int_0^{2\pi} B_0(s,s)\,ds = \int_0^{2\pi} \sin(s)\cos(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2s)\,ds = \frac{1}{4}(-\cos 2s)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

តាមរូបមន្ត (2.12) យើងបាន

$$B_1(x,t) = C_1 K(x,t) - \int_0^{2\pi} K(x,s) B_0(s,t)\,ds$$

$$= 0 \times \sin x \cos t - \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(s)\sin(s)\cos(t)\, ds = 0$$

ការធ្វើជាបន្ត យើងបាន

$$C_2 = C_3 = \cdots = 0 \text{ និង } B_2(x, t) = B_3(x, t) = \cdots = 0 \text{ ។}$$

តាមរូបមន្ត (2.8) និង (2.9) យើងបាន

$$D(x,t;\,\lambda) = K(x, t) = \sin x \cos t$$

និង $D(\lambda) = 1$ ។

នាំឱ្យរ៉េសូលវ៉ង់គឺ $R(x,t;\,\lambda) = \sin x \cos t$ ។

តាមសមីការ (2.6) យើងបានចម្លើយនៃសមីការ (*) គឺ

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t;\,\lambda)\, f(t)\, dt$$

$$= \cos 2x + (1)\int_0^{2\pi} \sin x \cos t \cos 2t\, dt$$

$$= \cos 2x + \frac{1}{2}\sin x \int_0^{2\pi} [\cos 3t + \cos t]\, dt$$

$$= \cos 2x + \frac{1}{2}\sin x \left[\frac{1}{3}\sin 3t + \sin t\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \cos 2x$$

២.៣.ស្នូលអ៊ីតេរេ និង សំណង់រ៉េសូលវ៉ង់ដោយប្រើស្នូលអ៊ីតេរេ (Noyeaux itérés et Construction de la résolvante à l'aide des noyeaux itérés)

☞ សមីការអាំងតេក្រាលប្រេដូម

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t) dt = f(x)$$

តាមសមីការវ៉ុលទែរ៉ា វាអាចមានវិធីរកតម្លៃប្រហែលជាបន្តបន្ទាប់ ។ ដូចនេះ គេអាចតាង

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x)\, \lambda^n \qquad (2.14)$$

ដែល $\psi_n(x)$ កំណត់ដោយរូបមន្ត

$$\psi_1(x)=\int_a^b K(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$\psi_2(x)=\int_a^b K(x,t)\,\psi_1(t)\,dt=\int_a^b K_2(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$\psi_3(x)=\int_a^b K(x,t)\,\psi_2(t)\,dt=\int_a^b K_3(x,t)\,f(t)\,dt$$

និងជាបន្តបន្ទាប់ ដែលនៅក្នុងនោះ

$$K_2(x,t)=\int_a^b K(x,z)K_1(z,t)\,dz$$

$$K_3(x,t)=\int_a^b K(x,z)K_2(z,t)\,dz$$

ហើយជាទូទៅ

$$K_n(x,t)=\int_a^b K(x,z)\,K_{n-1}(z,t)\,dz \qquad (2.15)$$

ចំពោះ $n=2,3,\dots..$ និង $K_1(x,t)\equiv K(x,t)$ ។ អនុគមន៍ $K_n(x,t)$ កំណត់ដោយរូបមន្ត (2.15) ហៅថាជា *ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ* (Noyaux itérés) ។ វាបានផ្ទៀងផ្ទាត់នូវទំនាក់ទំនង

$$K_n(x,t)=\int_a^b K_m(x,s)\,K_{n-m}(s,t)\,ds \qquad (2.16)$$

ដែល m ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង n ។

រ៉េសូលវ៉ង់នៃសមីការអាំងតេក្រាល (2.1) គឺកំណត់ជាអនុគមន៍ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ ដែលមានរាងដូចខាងក្រោម :

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{+\infty} K_n(x,t)\,\lambda^{n-1} \qquad (2.17)$$

អង្គទីពីរ ជាស៊េរីនឺម៉ាន់នៃស្នូល (Neumann du noyau) $K(x,t)$ ។ ស៊េរីនេះរួមចំពោះ

$$|\lambda|<\frac{1}{B} \qquad (2.18)$$

ដែល $B=\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt}$ ។

ចម្លើយនៃសមីការប្រេដហូម ប្រភេទទីពីរ (2.1) កំណត់ដោយ :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt \qquad (2.19)$$

លក្ខខណ្ឌ (2.18) មានសារសំខាន់ចំពោះភាពរួមនៃស៊េរី (2.17) ។ ប៉ុន្តែសមីការ (2.1) អាចមានចម្លើយចំពោះ $|\lambda|>\frac{1}{B}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៧ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \varphi(t)\,dt=1 \qquad (2.20)$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងមាន $f(x)=1$ និង $K(x,t)\equiv 1$ នោះ $K_n(x,t)=1$ ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$ ។

យើងបាន

$$B^2=\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)\,dx\,dt=\int_0^1\int_0^1 dx\,dt=1$$

នាំឱ្យ $B=1$ និង $R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{+\infty}K_n(x,t)\,\lambda^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}$ ។

ក្នុងករណីនេះ លក្ខខណ្ឌ (2.18) ធ្វើឱ្យស៊េរី (2.17) រួមចំពោះ $|\lambda|<1$ ។

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការ (2.20) គឺ

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)+\lambda\int_0^1 R(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt\\&=1+\lambda\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}\,dt\\&=1+\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{n-1}\\&=1+\lambda\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)=\frac{1}{1-\lambda}\quad \text{ចំពោះ } |\lambda|<1\end{aligned}$$

បើ $|\lambda|>1$ នោះ $\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda}$ ក៏ជាចម្លើយនៃសមីការ (2.20) ដែរ ពីព្រោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។

គេមាន $K(x, t)$ និង $L(x, t)$ ជាអនុគមន៍ស្នូលពីរ ។ យើងនិយាយថា វាអរតូកូណាល់គ្នា (Orthogonaux) បើវាផ្ទៀងផ្ទាត់នូវលក្ខខណ្ឌទាំងពីរខាងក្រោម :

$$\int_a^b K(x, z)\, L(z, t)\, dz = 0 \quad \text{និង} \quad \int_a^b L(x, z)\, K(z, t)\, dz = 0 \qquad (2.21)$$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ x និង t ។

ឧទាហរណ៍ ៨: បង្ហាញថា $K(x, t)=xt$ និង $L(x, t)=x^2 t^2$ អរតូកូណាល់គ្នាលើ $[-1, 1]$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងបាន

$$\int_{-1}^{1} K(x, z)\, L(z, t)\, dz = \int_{-1}^{1} (xz)(z^2 t^2)\, dz$$

$$= x t^2 \int_{-1}^{1} z^3\, dz = 0$$

និង

$$\int_{-1}^{1} L(x, z)\, K(z, t)\, dz = \int_{-1}^{1} (x^2 z^2)(zt) dz$$

$$= x^2 t \int_{-1}^{1} z^3\, dz = 0 \quad ។$$

ដូចនេះ $K(x, t)$ និង $L(x, t)$ អរតូកូណាល់គ្នាលើ $[-1, 1]$ ។

បើសិនស្នូលអ៊ីតេរេ $K_n(x, t)=0$ ចំពោះគ្រប់ $n=2, 3, 4, \ldots$ នោះរ៉េស្ទូលវ៉ង់

$$R(x,t; \lambda)=\sum_{n=1}^{+\infty} K_n(x, t)\, \lambda^{n-1}=K_1(x, t)=K(x, t) \quad ។$$

ឧទាហរណ៍ ៩: បើ $K(x, t)=\sin(x-2t);\ 0 \le x \le 2\pi, 0 \le t \le 2\pi$ ចូរកំណត់រ៉េស្ទូលវ៉ង់ $R(x,t; \lambda)$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងបាន $K_1(x, t)=K(x, t)=\sin(x-2t)$

$$K_2(x,t)=\int_0^{2\pi} K(x,z)\,K_1(z,t)\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin(x-2z)\sin(z-2t)\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(x+2t-3z)-\cos(x-2t-z)]\,dz$$

$$=\frac{1}{2}[-\frac{1}{3}\sin(x+2t-3z)+\sin(x-2t-z)]\Bigg|_{z=0}^{z=2\pi}=0$$

តាមវិធីកំណើនគណិតវិទ្យា យើងបាន $K_n(x,t)\equiv 0$ គ្រប់ $n=2,3,4,\ldots$ ។
នាំឱ្យរ៉េសូលវ៉ង់ $R(x,t;\lambda)=K(x,t)=\sin(x-2t)$ ។

យើងឃើញថា ស៊េរីនីម៉ាន់ (2.17) មានតួតែមួយគត់ និង រួមចំពោះគ្រប់ λ ។

ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ $K_n(x,t)$ សំដែងដោយផ្ទាល់ជាអនុគមន៍នៃស្នូល $K(x,t)$ ដែលគេបានឱ្យ :

$$K_n(x,t)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,s_1)K(s_1,s_2)\cdots K(s_{n-1},t)\,ds_1\,ds_2\cdots ds_{n-1} \quad (2.22)$$

គ្រប់ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ $K_n(x,t)$ ដែលចាប់ផ្តើមដោយ $K_2(x,t)$ គឺជាអនុគមន៍ជាប់លើការេ $a\le x\le b,\ a\le t\le b$ ប្រសិនបើអនុគមន៍ស្នូលដើម $K(x,t)$ ជាអនុគមន៍ការេបូកបាន (Carré sommable) លើការេនេះ ។

បើស្នូល $K(x,t)$ ដែលគេឱ្យមានលក្ខណៈឆ្លុះ នោះគ្រប់ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ $K_n(x,t)$ ក៏មានលក្ខណៈឆ្លុះដែរ ។

ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនឹងបង្ហាញពីការស្វែងរកស្នូលអ៊ីតេរ៉េ ។

ឧទាហរណ៍ ១០ : កំណត់ស្នូលអ៊ីតេរ៉េនៃស្នូល $K(x,t)=x-t$ ចំពោះ $a=0$ និង $b=1$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ដោយប្រើរូបមន្ត (2.15) យើងបានស្នូលអ៊ីតេរ៉េជាបន្តបន្ទាប់ :

$$K_1(x,t)=x-t$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1(x-s)(s-t)\,ds=\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 (x-s)(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3})\,ds=-\frac{x-t}{12}$$

$$K_4(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds$$

$$=-\frac{1}{12}K_2(x,t)=-\frac{1}{12}(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3})$$

$$K_5(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3})\,ds$$

$$=-\frac{1}{12}K_3(x,t)=\frac{x-t}{12^2}$$

$$K_6(x,t)=\frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds$$

$$=\frac{1}{12^2}K_2(x,t)=\frac{1}{12^2}(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3})$$

តាមវិធីកំណើនគណិតវិទ្យា យើងទាញបានលទ្ធផលនៃស្នូលអ៊ីតេរ៉េមានទម្រង់ :

១-ចំពោះ $n=2k-1$ នោះ

$$K_{2k-1}(x,t)=\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t)$$

២-ចំពោះ $n=2k$ នោះ

$$K_{2k}(x,t)=\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3})$$

ដែល $k=1,2,3,\ldots..$ ។

ឧទាហរណ៍ ១១ : កំណត់ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ $K_1(x,t)$ និង $K_2(x,t)$ បើ $K(x,t)=e^{\min(x,t)}$, $a=0$ និង $b=1$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

តាមនិយមន័យ យើងបាន :

$$\min(x,t)=\begin{cases} x & \text{បើ } 0\le x\le t \\ t & \text{បើ } t\le x\le 1 \end{cases}$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ស្នូលដែលគេឱ្យអាចសរសេរជា

$$K(x, t) = \begin{cases} e^x & \text{បើ } 0 \le x \le t \\ e^t & \text{បើ } t \le x \le 1 \end{cases}$$

អនុគមន៍ស្នូលនេះ ជាអនុគមន៍ឆ្លុះ ពីព្រោះ $K(x, t) = K(t, x)$ ។

យើងបាន :

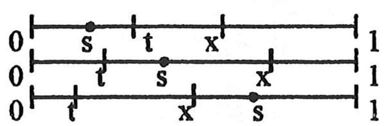
$$K_1(x, t) = K(x, t)$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s)\, K_1(s, t)\, ds = \int_0^1 K(x, s)\, K(s, t)\, ds$$

ដោយ
$$K(x, s) = \begin{cases} e^x & \text{បើ } 0 \le x \le s \\ e^s & \text{បើ } s \le x \le 1 \end{cases}$$

និង
$$K(s, t) = \begin{cases} e^s & \text{បើ } 0 \le s \le t \\ e^t & \text{បើ } t \le s \le 1 \end{cases}$$

ហើយតាមលក្ខណៈឆ្លុះនៃស្នូល $K(x, t)$ នោះយើងអាចកំណត់ $K_2(x, t)$ ចំពោះ $x > t$ ឬ $x < t$ ។



រូបទី ៤

តាមរូបទី ៤ យើងបាន :

$$K_2(x, t) = \int_0^t K(x, s)\, K(s, t) ds + \int_t^x K(x, s)\, K(s, t) ds + \int_x^1 K(x, s)\, K(s, t) ds \quad (*)$$

+ ក្នុងចន្លោះ $(0, t)$: $s < t < x$ នាំឱ្យ

$$\int_0^t K(x, s)\, K(s, t) ds = \int_0^t e^s e^s\, ds = \int_0^t e^{2s}\, ds = \frac{e^{2t} - 1}{2}$$

+ ក្នុងចន្លោះ (t, x) : $t < s < x$ នាំឱ្យ

$$\int_t^x K(x, s)\, K(s, t) ds = \int_t^x e^s e^t\, ds = e^t \int_0^t e^s\, ds = e^{x+t} - e^{2t}$$

+ ក្នុងចន្លោះ $(x, 1)$: $s > x > t$ នាំឱ្យ

$$\int_x^1 K(x, s)\, K(s, t) ds = \int_x^1 e^x e^t\, ds = (1 - x)\, e^{x+t}$$

យើងបូកអាំងតេក្រាលនៃ (*) នោះយើងបាន :

$$K_2(x, t) = (2-x)\, e^{x+t} - \frac{1+e^{2t}}{2} \quad \text{ចំពោះ } x > t \text{ ។}$$

យើងរកកន្សោមនៃ $K_2(x, t)$ ចំពោះ $x < t$ ដោយប្តូរអថេរ x និង t ក្នុងកន្សោមនៃ $K_2(x, t)$ ចំពោះ $x > t$:

$$K_2(x, t) = (2-t)\, e^{x+t} - \frac{1+e^{2x}}{2} \quad \text{ចំពោះ } x < t \text{ ។}$$

ដូចនេះ ស្នូលអ៊ីតេរ៉េទីពីរមានរាង

$$K_2(x, t) = \begin{cases} (2-t)e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2x}}{2} & \text{បើ } 0 \le x \le t \\ (2-x)e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2t}}{2} & \text{បើ } t \le x \le 1 \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍ ១២ : កំណត់ស្នូលអ៊ីតេរ៉េ $K_1(x, t)$ និង $K_2(x, t)$ ដោយដឹងថា $a = 0, b = 1$ និង

$$K(x, t) = \begin{cases} x+t & \text{បើ } 0 \le x < t \\ x-t & \text{បើ } t < x \le 1 \end{cases} \text{ ។}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងបាន :

$$K_1(x, t) = K(x, t)$$

និង $$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s)\, K(s, t)\, ds$$

ដែល $$K(x, s) = \begin{cases} x+s & \text{បើ } 0 \le x < s \\ x-s & \text{បើ } s < x \le 1 \end{cases}$$

និង $$K(s, t) = \begin{cases} s+t & \text{បើ } 0 \le s < t \\ s-t & \text{បើ } t < s \le 1 \end{cases}$$

ដោយអនុគមន៍ស្នូល $K(x, t)$ គ្មានលក្ខណៈឆ្លុះ នោះយើងរក $K_2(x, t)$ តាមពីរករណីដូចតទៅ :

+ ករណីទី១: $x < t$ យើងបាន

$$K_2(x, t) = I_1 + I_2 + I_3$$

ដែល $I_1=\int_0^x (x-s)(s+t)\,ds=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2t}{2}$

$$I_2=\int_x^t (x+s)(s+t)\,ds=\frac{5t^3}{6}-\frac{5x^3}{6}+\frac{3}{2}xt^2-\frac{3}{2}x^2t$$

និង $I_3=\int_t^1 (x+s)(s-t)\,ds=\dfrac{t^3}{6}+\dfrac{xt^2}{2}-xt+\dfrac{x}{2}-\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{3}$ ។

ដោយបូកអាំងតេក្រាលទាំងនេះ យើងបាន :

$$K_2(x,t)=t^3-\frac{2}{3}x^3-x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}$$ ចំពោះ $x<t$

+ ករណីទី២: $x>t$ យើងបាន

$$K_2(x,t)=I_1'+I_2'+I_3'$$

ដែល $I_1'=\int_0^t (x-s)(s+t)\,ds=\dfrac{3}{2}xt^2-\dfrac{5t^3}{6}$

$$I_2'=\int_t^x (x-s)(s-t)\,ds=\frac{x^3}{6}-\frac{t^3}{6}-\frac{1}{2}x^2t+\frac{1}{2}xt^2$$

និង $I_3'=\int_x^1 (x+s)(s-t)\,ds=-\dfrac{5x^3}{6}+\dfrac{3x^2t}{2}+\dfrac{x-t}{2}-xt+\dfrac{1}{3}$ ។

ដោយបូកអាំងតេក្រាលទាំងនេះ យើងបាន :

$$K_2(x,t)=-t^3-\frac{2}{3}x^3+x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}$$ ចំពោះ $x>t$

ដូចនេះ ស្នូលអ៊ីតេរ៉េទីពីរមានទម្រង់

$$K_2(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x^3+t^3-x^2t+2xt^2-xt+\dfrac{x-t}{2}+\dfrac{1}{3} & \text{បើ } 0\le x<t\\[2ex] -\dfrac{2}{3}x^3-t^3+x^2t+2xt^2-xt+\dfrac{x-t}{2}+\dfrac{1}{3} & \text{បើ } t<x\le 1\end{cases}$$

គេអាចធ្វើតាមរបៀបស្រដៀងគ្នានៃអនុគមន៍អ៊ីតេរ៉េ $K_n(x,t)$ ផ្សេងទៀតចំពោះ $n=3$, 4, 5, ... ។

☞ យើងនឹងបង្ហាញឧទាហរណ៍មួយលើសំណង់រ៉េសូលវ៉ង់នៃសមីការអាំងតេក្រាល ដោយប្រើស្នូលអ៊ីតេរ៉េ ។

គេឱ្យសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xt\,\varphi(t)\,dt=f(x) \qquad (2.23)$$

ចំពោះសមីការនេះមាន $K(x,t)=xt$, $a=0$ និង $b=1$ ហើយយើងរកអនុគមន៍ស្នូលអ៊ីតេរ៉េបន្តបន្ទាប់:

$$K_1(x,t)=xt$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 (xz)(zt)dz=\frac{xt}{3}$$

$$K_3(x,t)=\frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)dz=\frac{xt}{3^2}$$

....

....

$$K_n(x,t)=\frac{xt}{3^{n-1}}$$

តាមរូបមន្ត (2.17) យើងបាន:

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,t)\lambda^{n-1}=xt\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1}=\frac{3xt}{3-\lambda}$$

ដែល $|\lambda|<\frac{1}{B}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$

ពីព្រោះ $B=\sqrt{\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)\,dx\,dt}=\sqrt{\int_0^1\int_0^1 (xt)^2\,dx\,dt}=\frac{1}{3}$ ។

ដោយប្រើរូបមន្ត (2.19) យើងបានចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាល (2.23) គឺ:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{3xt}{3-\lambda}f(t)\,dt \quad (\lambda\neq 3) \text{ ។}$$

ករណីពិសេស ចំពោះ $f(x) = x$ នោះយើងបាន:

$$\varphi(x)=x+\frac{3x\lambda}{3-\lambda}\int_0^1 t^2\,dt$$

$$=x+\frac{3x\lambda}{3-\lambda}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=x+\frac{x\lambda}{3-\lambda}=\frac{3x}{3-\lambda} \quad (\lambda\neq 3) \text{ ។}$$

☞ បើ $M(x, t)$ និង $N(x, t)$ ជាអនុគមន៍ស្នូលពីរដែលអរតូកូណាល់គ្នា នោះរ៉េសូលវ៉ង់ $R(x, t; \lambda)$ ធៀបនឹងស្នូល $K(x, t) = M + N$ គឺស្មើនឹងផលបូកនៃរ៉េសូលវ៉ង់ $R_1(x, t; \lambda)$ និង $R_2(x, t; \lambda)$ ធៀបនឹង M និង N រៀងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ ១៣ : កំណត់រ៉េសូលវ៉ង់នៃអនុគមន៍ស្នូល

$$K(x, t) = xt + x^2 t^2; \ a = -1 \text{ និង } b = 1 \text{ ។}$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

តាមឧទាហរណ៍ទី៨ យើងបានបង្ហាញថាស្នូល $M(x, t) = xt$ និង $N(x, t) = x^2 t^2$ អរតូកូណាល់គ្នាលើ $[-1, 1]$ ។ នាំឱ្យរ៉េសូលវ៉ង់នៃ $K(x, t)$ ស្មើនឹងផលបូកនៃរ៉េសូលវ៉ង់នៃ $M(x, t)$ និង $N(x, t)$ ។

+ បើ $M(x, t) = xt$ នោះយើងបានអនុគមន៍អ៊ីតេរ៉េជាបន្តបន្ទាប់:

$$M_1(x, t) = xt$$

$$M_2(x, t) = \int_{-1}^{1} M(x, z)\, M_1(z, t)\, dz = \int_{-1}^{1} (xz)\,(zt) dz = \frac{2xt}{3}$$

$$M_3(x, t) = \int_{-1}^{1} M(x, z)\, M_2(z, t)\, dz = \int_{-1}^{1} (xz)\,(\frac{2zt}{3}) dz = \frac{2^2 xt}{3^2}$$

$$M_4(x, t) = \int_{-1}^{1} M(x, z)\, M_3(z, t)\, dz = \int_{-1}^{1} (xz)\,(\frac{2^2 zt}{3^2}) dz = \frac{2^3 xt}{3^3}$$

....

....

$$M_n(x, t) = \frac{2^{n-1} xt}{3^{n-1}}$$

+ បើ $N(x, t) = x^2 t^2$ នោះយើងបានអនុគមន៍អ៊ីតេរ៉េជាបន្តបន្ទាប់:

$$N_1(x, t) = x^2 t^2$$

$$N_2(x, t) = \int_{-1}^{1} N(x, z)\, N_1(z, t)\, dz = \int_{-1}^{1} (x^2 z^2)\,(z^2 t^2) dz = \frac{2x^2 t^2}{5}$$

$$N_3(x, t) = \int_{-1}^{1} N(x, z)\, N_2(z, t)\, dz = \int_{-1}^{1} (x^2 z^2)\,(\frac{2z^2 t^2}{5}) dz = \frac{2^2 x^2 t^2}{5^2}$$

....

....

$$N_n(x, t) = \frac{2^{n-1} x^2 t^2}{5^{n-1}}$$

តាមរូបមន្ត (2.17) យើងបាន:

$$\begin{aligned} R_K(x, t; \lambda) &= R_M(x, t; \lambda) + R_N(x, t; \lambda) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n(x, t)\lambda^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x, t)\lambda^{n-1} \\ &= x t \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2\lambda}{3})^{n-1} + x^2 t^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2\lambda}{5})^{n-1} \\ &= \frac{3xt}{3-2\lambda} + \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda} \end{aligned}$$

ដែល $|\lambda| < \frac{3}{2}$ ។

☞ ជាទូទៅបើអនុគមន៍ស្នូល $M^{(1)}(x, t), M^{(2)}(x, t), \cdots, M^{(n)}(x, t)$ អរតូកូណាល់គ្នាពីរៗ នោះរ៉េសូលវ៉ង់ធៀបនឹងផលបូក

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(x, t)$$

ស្មើនឹងផលបូកនៃរ៉េសូលវ៉ង់ធៀបនឹងអនុគមន៍ស្នូលនីមួយៗទាំងនោះ ។

☞ យើងហៅថាជា ដានទី n (n-ième trace) នៃស្នូល K(x, t) គឺជាបរិមាណ

$$A_n = \int_a^b K_n(x, t)\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.24}$$

ដែល $K_n(x, t)$ ជាអនុគមន៍ស្នូលអ៊ីតេរ៉េទី n នៃ $K(x, t)$ ។

ដូច្នេះ ដេរីវេទីណង់ប្រេដហ្វូម $D(\lambda)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នូវរូបមន្តខាងក្រោម:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1} \tag{2.25}$$

កាំរូមនៃស៊េរីគត់ (2.25) ស្មើនឹងម៉ូឌុលតូចបំផុតនៃចំនួនសម្គាល់ ។

<u>ចំណាំ</u> ចំនួន λ ដែលធ្វើឱ្យសមីការអាំងតេក្រាលអូម៉ូសែនប្រេដហ្វូម ប្រភេទទីពីរ មានចម្លើយមិនសូន្យ មានន័យថា $\varphi(x) \neq 0$ ហៅថាជា ចំនួនសម្គាល់ ឬ តម្លៃសម្គាល់ (Nombre (ou valeur) caractéristique) ។

២.៤~សមីការអាំងតេក្រាលមានស្នូលទូទៅ

(Équations Intégrales à Noyau Dégénéré)

☞ ស្នូល $K(x, t)$ នៃសមីការអាំងតេក្រាលប្រេដហូម ប្រភេទទីពីរ ហៅថាជា ស្នូលទូទៅ បើវាជាផលបូកនៃចំនួនរាប់អស់នៃផលគុណរវាងអនុគមន៍នៃ x និងអនុគមន៍នៃ t មានន័យថា វាមានទម្រង់

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t) \qquad (2.26)$$

ដែលអនុគមន៍ $a_k(x)$ និង $b_k(t)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) ជាអនុគមន៍ជាប់លើការេ $a \le x, t \le b$ ហើយមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។

☞ សមីការអាំងតេក្រាលដែលមានស្នូលទូទៅ (2.26) គឺ :

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\Big[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t)\Big]\varphi(t)\,dt=f(x) \qquad (2.27)$$

សមីការ (2.27) អាចសរសេរជា

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\int_a^b b_k(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (2.28)$$

បើយើងតាង

$$\int_a^b b_k(t)\,\varphi(t)\,dt=C_k \quad (k=1,2,\ldots,n) \qquad (2.29)$$

នោះសមីការ (2.28) ទៅជា:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k\, a_k(x) \qquad (2.30)$$

ដែល C_k ជាអញ្ញាតថេរ ពីព្រោះអនុគមន៍ $\varphi(x)$ ជាអញ្ញាត ។

ដូច្នេះ ដំណោះស្រាយនៃសមីការអាំងតេក្រាលដែលមានអនុគមន៍ស្នូលទូទៅ នៅតែស្វែងរកអញ្ញាតថេរ C_k ($k=1, 2, 3, \ldots, n$) ។ យើងយកសមីការ (2.30) ជំនួសក្នុងសមីការអាំងតេក្រាល (2.27) យើងបាន:

$$\sum_{m=1}^{n}\Big\{C_m-\int_a^b b_m(t)\Big[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k\, a_k(t)\Big]dt\Big\}\,a_m(x)=0$$

ដោយអនុគមន៍ $a_m(x)$ $(m=1,2,\ldots,n)$ មិនអាស្រ័យលើនៅអ៊េរ នោះយើងទាញបាន:

$$C_m-\int_a^b b_m(t)\,[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\,a_k(t)]\,dt=0$$

ឬ
$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\int_a^b a_k(t)\,b_m(t)\,dt=\int_a^b b_m(t)\,f(t)\,dt$$

បើយើងតាង

$$a_{km}=\int_a^b a_k(t)\,b_m(t)\,dt,\qquad f_m=\int_a^b b_m(t)\,f(t)\,dt$$

នោះយើងបាន:

$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{km}\,C_k=f_m\quad(m=1,2,\ldots,n)$$

ឬយើងសរសេរកន្សោមនេះជាទម្រង់ពន្លាត

$$\begin{cases}(1-\lambda a_{11})C_1 & -\lambda a_{12}C_2-\cdots\cdots-\lambda a_{1n}C_n=f_1\\ -\lambda a_{21}C_1+(1-\lambda a_{22})C_2 & -\cdots\cdots-\lambda a_{2n}C_n=f_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\lambda a_{n1}C_1 & -\lambda a_{n2}C_2-\cdots+(1-\lambda a_{nn})C_n=f_n\end{cases}\tag{2.31}$$

ប្រព័ន្ធសមីការ (2.31) ជាប្រព័ន្ធមួយមាន n សមីការលីនេអ៊ែរ និង n អញ្ញាតដែលដេទែរមីណង់របស់វាស្មើនឹង

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots\cdots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots\cdots & -\lambda a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots\cdots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}\tag{2.32}$$

បើ $\Delta(\lambda)\neq 0$ នោះប្រព័ន្ធសមីការ (2.31) មានចម្លើយតែមួយគត់ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ដែលកំណត់បានតាមរូបមន្តក្រាមមឺរ (Cramer) :

$$C_k=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{1k-1} & f_1 & -\lambda a_{1k+1} & \cdots\cdots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & -\lambda a_{2k-1} & f_2 & -\lambda a_{2k+1} & \cdots\cdots & -\lambda a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{nk-1} & f_n & -\lambda a_{nk+1} & \cdots\cdots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}\tag{2.33}$$

ចំពោះ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ។

ដូចនេះ សមីការអាំងតេក្រាល (2.27) មានចម្លើយជាអនុគមន៍ $\varphi(x)$ ដែលកំណត់ដោយសមភាព:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \, a_k(x)$$

ដែលមេគុណ C_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ កំណត់បានតាមរូបមន្ត (2.33) ។

ឧទាហរណ៍ ១៤ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} e^{\arcsin x} \varphi(t)\, dt = \operatorname{tg} x \qquad \text{(i)}$$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងសរសេរសមីការខាងលើ ជារាង:

$$\varphi(x) = e^{\arcsin x} \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, dt + \operatorname{tg} x$$

ហើយយើងតាង

$$C = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, dt \qquad \text{(ii)}$$

ដែល C ជាអញ្ញាតថេរ ។ នាំឱ្យសមីការ (i) មានទម្រង់

$$\varphi(x) = C\, e^{\arcsin x} + \operatorname{tg} x \qquad \text{(iii)}$$

យើងយកតម្លៃ $\varphi(x)$ នៃ (iii) ជំនួសក្នុងសមីការ (ii) នោះយើងបាន:

$$C = \int_{-1}^{1} (C\, e^{\arcsin t} + \operatorname{tg} t)\, dt$$

ឬ
$$C = C \int_{-1}^{1} e^{\arcsin t}\, dt + \int_{-1}^{1} \operatorname{tg} t\, dt \qquad \text{(iv)}$$

តាង $I_1 = \int_{-1}^{1} \operatorname{tg} t\, dt$ និង $I_2 = \int_{-1}^{1} e^{\arcsin t}\, dt$ ។

\+ ចំពោះ I_1 យើងបាន:

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{\sin t}{\cos t}dt=-\int_{-1}^{1}\frac{d(\cos t)}{\cos t}=-\ln|\cos t|\Big|_{-1}^{1}=0$$

+ ចំពោះ I_2 យើងតាង $y=\arcsin t$ នាំឱ្យ $t=\sin y$ និង $dt=\cos y\,dy$ ។

យើងបាន

$$I_2=\int_{-1}^{1}e^{\arcsin t}\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{y}\cos y\,dy=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$ (តាមវិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

សមីការ (iv) ទៅជា:

$$C=C\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\right)+0$$ នាំឱ្យ $C=0$ ។

ដោយជំនួសតម្លៃ $C=0$ ចូលក្នុងសមីការ (iii) នោះយើងបានចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាល (i) គឺ:

$$\varphi(x)=\operatorname{tg}x$$ ។

ឧទាហរណ៍ ១៥ : ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos t+t^2\sin x+\cos x\sin t)\,\varphi(t)\,dt=x \qquad (i)$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងសរសេរសមីការនេះ ជាទម្រង់

$$\varphi(x)=\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t\,dt+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt$$

$$+\lambda\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin t\,dt+x$$

ហើយយើងតាង

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t\,dt,\ C_2=\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt,\ C_3=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin t\,dt \qquad (ii)$$

ជាអញ្ញាតថេរ ។ នាំឱ្យសមីការ (i) មានរាង

$$\varphi(x)=C_1\lambda x+C_2\lambda\sin x+C_3\lambda\cos x+x \qquad (iii)$$

យើងជំនួសតម្លៃ $\varphi(x)$ នៃ (iii) ទៅក្នុង (ii) នោះយើងបាន:

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t)\cos t\, dt$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t)\, dt$$

និង $$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t)\sin t\, dt \quad ។$$

តាមការគណនាអាំងតេក្រាល យើងបានប្រព័ន្ធសមីការពីជគណិតដែលមានអញ្ញាត C_1, C_2 និង C_3:

$$\begin{cases} C_1 - \lambda\pi C_3 = 0 \\ C_2 + 4\lambda\pi C_3 = 0 \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 = 2\pi \end{cases} \qquad \text{(iv)}$$

ដេទែរមីណង់នៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 1 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0$$

នាំឱ្យប្រព័ន្ធសមីការ (iv) មានចម្លើយតែមួយគត់គឺ

$$C_1 = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 1 & 4\lambda\pi \\ 2\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 0 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & 2\pi & 1 \end{vmatrix} = -\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

និង $$C_3 = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 2\pi \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

ដោយជំនួសតម្លៃ C_1, C_2 និង C_3 ដែលទទួលបានចូលក្នុងសមីការ (iii) នោះយើងបានចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលដែលគេឱ្យគឺៈ

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x \quad ។$$

☜✧✧✧☞

លំហាត់ជំពូកទី ២

បង្ហាញថាអនុគមន៍ដែលគេឱ្យខាងក្រោម ជាចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាល :

2.1 $\varphi(x)=1$; $\varphi(x)+\int_0^1 x(e^{xt}-1)\,\varphi(t)\,dt=e^x-x$

2.2 $\varphi(x)=2e^x\,(x-\frac{1}{3})$; $\varphi(x)+2\int_0^1 e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt=2xe^x$

2.3 $\varphi(x)=1-\dfrac{2\sin x}{1-\frac{\pi}{2}}$; $\varphi(x)-\int_0^{\pi}\cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=1$

2.4 $\varphi(x)=\sqrt{x}$; $\varphi(x)-\int_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=\sqrt{x}+\dfrac{x}{15}\left(4x^{3/2}-7\right)$

ដែល $K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2} & \text{បើ } 0\le x\le t\\ \dfrac{t(2-x)}{2} & \text{បើ } t\le x\le 1\end{cases}$

2.5 $\varphi(x)=e^x$; $\varphi(x)+\lambda\int_0^1 \sin xt\,\varphi(t)\,dt=1$

2.6 $\varphi(x)=\cos x$; $\varphi(x)-\int_0^{\pi}(x^2+t)\cos t\,\varphi(t)\,dt=\sin x$

2.7 $\varphi(x)=xe^{-x}$; $\varphi(x)-4\int_0^{\infty}e^{-(x+t)}\,\varphi(t)\,dt=(x-1)e^{-x}$

2.8 $\varphi(x)=\cos 2x$; $\varphi(x)-3\int_0^{\pi}K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=\cos x$

ដែល $K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t & \text{បើ } 0\le x\le t\\ \sin t\cos x & \text{បើ } t\le x\le \pi\end{cases}$

2.9 $\varphi(x)=\dfrac{4C}{\pi}\sin x$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ;

$$\varphi(x)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\sin x\,\frac{\sin^2 t}{t}\,\varphi(t)\,dt=0$$

2.10 បង្ហាញថា សមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x)=x+\lambda\int_0^1 xt\,\varphi(t)\,dt$$

មានដេទែរមីណង់ប្រេដូមសរសេរជា $D(\lambda)=1-\dfrac{\lambda}{3}$

និងមីនីរនៃដេទែរមីណង់ប្រេដហ្វូម $D(x, t; \lambda) = xt$ ។

2.11 បង្ហាញថា ចំពោះសមីការអាំងតេក្រាល

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2)\, \varphi(t)\, dt$$

នោះគេបាន $D(\lambda) = 1 - \dfrac{2\lambda}{3} - \dfrac{\lambda^2}{72}$

និង $D(x, t; \lambda) = xt + t^2 + \lambda\left(\dfrac{xt^2}{2} - \dfrac{xt}{3} - \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{t}{4}\right)$ ។

2.12 បង្ហាញថា បើ

$$K(x, t) = f_1(x)\, f_2(t) \quad \text{និង} \quad \int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, dx = A$$

នោះគេបាន $D(\lambda) = 1 - \lambda A$ និង $D(x, t; \lambda) = f_1(x)\, f_2(t)$

ហើយចម្លើយនៃសមីការអាំងតេក្រាលមិនអូម៉ូសែនដែលមានអង្គទីពីរ $f(x)$ គឺមានទម្រង់

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - \lambda A} \int_a^b f(t)\, f_2(t)\, dt \quad ។$$

2.13 បង្ហាញថា បើ

$$K(x, t) = f_1(x)\, g_1(t) + f_2(x)\, g_2(t)$$

នោះ $D(\lambda)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីពីរនៃ λ និងជាទូទៅបើ

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)\, g_m(t)$$

នោះ $D(\lambda)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n នៃ λ ។

ចូរប្រើដេទែរមីណង់ប្រេដហ្វូម និង ដោះស្រាយរករ៉េសូលវ៉ង់នៃអនុគមន៍ស្នូលខាងក្រោម:

2.14 $K(x, t) = 2x - t;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 1$

2.15 $K(x, t) = x^2 t - x t^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 1$

2.16 $K(x, t) = \sin x \cos t;\ 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le t \le 2\pi$

2.17 $K(x, t) = \sin x - \sin t;\ 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le t \le 2\pi$

ដោយប្រើទំនាក់ទំនងកំណើន (2.12) និង (2.13) ចូរកំណត់រ៉េសូលវ៉ង់នៃអនុគមន៍ស្នូលខាងក្រោម:

2.18 $K(x, t)=x+t+1;\ -1\le x\le 1,\ -1\le t\le 1$

2.19 $K(x, t)=1+3xt;\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1$

2.20 $K(x, t)=4xt-x^2;\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1$

2.21 $K(x, t)=e^{x-t};\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1$

2.22 $K(x, t)=\sin(x+t);\ 0\le x\le 2\pi,\ 0\le t\le 2\pi$

2.23 $K(x, t)=x-\operatorname{sh}t;\ -1\le x\le 1,\ -1\le t\le 1$

ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ដោយប្រើរ៉េសូលវ៉ង់:

2.24 $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin(x+t)\,\varphi(t)\,dt=1$

2.25 $\varphi(x)-\lambda\int_0^{1}(2x-t)\,\varphi(t)\,dt=\dfrac{x}{6}$

2.26 $\varphi(x)-\int_0^{2\pi}\sin x\cos t\,\varphi(t)\,dt=\cos 2x$

2.27 $\varphi(x)+\int_0^{1}e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt=e^x$

2.28 $\varphi(x)-\lambda\int_0^{1}(4xt-x^2)\,\varphi(t)\,dt=x$

កំណត់ស្នូលអ៊ីតេរ៉េនៃអនុគមន៍ស្នូលដើម $K(x, t)$ ខាងក្រោម ដែល a និង b ជាតម្លៃដែលគេឱ្យ :

2.29 $K(x, t)=x-t;\ a=-1,\ b=1$

2.30 $K(x, t)=\sin(x-t);\ a=0,\ b=\dfrac{\pi}{2}\ \ (n=2, 3)$

2.31 $K(x, t)=(x-t)^2;\ a=-1,\ b=1\ \ (n=2, 3)$

2.32 $K(x, t)=x+\sin t;\ a=-\pi,\ b=\pi$

2.33 $K(x, t)=xe^t;\ a=0,\ b=1$

2.34 $K(x, t)=e^x\cos t;\ a=0,\ b=\pi$

កំណត់ $K_2(x, t)$ ចំពោះលំហាត់ពីរខាងក្រោម:

2.35 $K(x, t)=e^{|x-t|};\ a=0,\ b=1$

2.36 $K(x, t) = e^{|x|+t}$; $a = -1$, $b = 1$

កំណត់រ៉េសូលវ៉ង់នៃអនុគមន៍ស្នូលខាងក្រោម:

2.36 $K(x, t) = e^{x+t}$; $a = 0$, $b = 1$

2.37 $K(x, t) = \sin x \cos t$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$

2.38 $K(x, t) = x e^{t}$; $a = -1$, $b = 1$

2.39 $K(x, t) = (1 + x)(1 - t)$; $a = -1$, $b = 0$

2.40 $K(x, t) = x^2 t^2$; $a = -1$, $b = 1$

2.41 $K(x, t) = xt$; $a = -1$, $b = 1$

កំណត់រ៉េសូលវ៉ង់ចំពោះអនុគមន៍ស្នូលខាងក្រោម:

2.42 $K(x, t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$; $a = 0$, $b = 2\pi$

2.43 $K(x, t) = 1 + (2x - 1)(2t - 1)$; $a = 0$, $b = 1$

2.44 បង្ហាញថា សមីការវ៉ុលទែរ៉ា

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x)$$

មានដេទែរមីណង់ប្រេដូម $D(\lambda) = e^{-A_1 \lambda}$ និងតាមវិបាក រ៉េសូលវ៉ង់នៃសមីការនេះជាអនុគមន៍វិភាគចំនួនគត់នៃ λ ។

2.45 គេឱ្យ $R(x, t; \lambda)$ ជារ៉េសូលវ៉ង់នៃស្នូល $K(x, t)$ ។

បង្ហាញថា រ៉េសូលវ៉ង់នៃសមីការ

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b R(x, t; \lambda)\, \varphi(t)\, dt = f(x)$$

ស្មើនឹង $R(x, t; \lambda + \mu)$ ។

2.46 គេឱ្យ $$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt = B^2$$

និង $$\int_a^b \int_a^b K_n^2(x, t)\, dx\, dt = B_n^2$$

ដែល $K_n(x, t)$ ជាអនុគមន៍អ៊ីតេរ៉េទី n នៃស្នូល $K(x, t)$ ។

បង្ហាញថា បើ $B_2 = B^2$ នោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ គេបាន $B_n = B^n$ ។

ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាលដែលមានស្នូលទូទៅខាងក្រោម:

2.47 $\varphi(x) - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, \varphi(t)\, dt = 2x - \pi$

2.48 $\varphi(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t\, \varphi(t)\, dt = \operatorname{cotg} x$

2.49 $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \cos(q \ln t)\, \varphi(t)\, dt = 1$

2.50 $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \arccos t\, \varphi(t)\, dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.51 $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^p \varphi(t)\, dt = 1 \quad (p > -1)$

2.52 $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x \ln t - t \ln x)\, \varphi(t)\, dt = \dfrac{6}{5}(1-4x)$

2.53 $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t\, \varphi(t)\, dt = \sin x$

2.54 $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} |\pi - t| \sin x\, \varphi(t)\, dt = x$

2.55 $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-t)\, \varphi(t)\, dt = \cos x$

2.56 $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \cos t - \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cos 3t)\, \varphi(t)\, dt = \cos x$

2.57 $\varphi(x) - \dfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[x - \frac{1}{2}(3t^2 - 1) + \frac{t}{2}(3x^2 - 1)\right] \varphi(t)\, dt = 1$

សេចក្តីបន្ថែម១

(Annexe1)

១- អនុគមន៍ f(x) មិនអវិជ្ជមានលើចន្លោះ (a, b) ហៅថាជា *អនុគមន៍អាចបូកបាន* លើចន្លោះនេះ បើសិន $\int_a^b f(x)\,dx$ ជាចំនួនកំណត់ ។

អនុគមន៍ f(x) មានសញ្ញាទូទៅ ជាអនុគមន៍អាចបូកបានលើ (a, b) លុះត្រាតែ វាមានលក្ខណៈដូចអនុគមន៍ | f(x) | ជាងនេះទៀតនៅពេលដែលអាំងតេក្រាល $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ជាចំនួនកំណត់ ។

ជាបន្តយើងនឹងបង្កើតចន្លោះដំបូង $I = (a, b)$ (ឬ $I_0 = (0, a)$) និងការេដំបូង $\Omega = \{ a \le x, t \le b \}$ (ឬ $\Omega_0 = \{ 0 \le x, t \le a\}$) ។

២- លំហ L_2 (a, b)

គេថាអនុគមន៍ការេនៃ f(x) *មានអាំងតេក្រាល* លើ [a, b] បើសិនអាំងតេក្រាល $\int_a^b f^2(x)dx$ មាន (ជាចំនួនកំណត់) ។ សំណុំនៃគ្រប់អនុគមន៍ការេ ដែលមានអាំងតេក្រាលលើ [a, b] តាងជា L_2(a, b) ឬ L_2 ចំពោះគ្រប់ខ្សែកោង ។

៣- លក្ខណៈដំបូងនៃអនុគមន៍ក្នុងលំហ L_2

ក- ផលគុណនៃពីរអនុគមន៍ការេ ដែលមានអាំងតេក្រាល ជាអនុគមន៍មានអាំងតេក្រាល ។

ខ- ផលបូកនៃពីរអនុគមន៍នៃ L_2 ជាអនុគមន៍នៃ L_2 ។

គ- បើ $f(x) \in L_2$ និងបើ λ ជាចំនួនពិតណាមួយ នោះគេបាន $\lambda f(x) \in L_2$ ។

ឃ- បើ $f(x) \in L_2$ និង $g(x) \in L_2$ នោះគេបានវិសមភាព Bouniakovski-Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx \qquad (1)$$

ផលគុណស្កាលែរ នៃពីរអនុគមន៍ $f(x) \in L_2$ និង $g(x) \in L_2$ ជាចំនួន

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \qquad (2)$$

គេហៅថា *ណម* (norme) នៃអនុគមន៍ f(x) នៃ L_2 ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន កំណត់ដោយ :

$$\|f\| = \sqrt{(f,\ f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \qquad (3)$$

ង- ចំពោះ f(x) និង g(x) នៃ L_2 នោះគេបានវិសមភាពត្រីកោណ :

$$\| f+g \| \leq \| f \| + \| g \| \tag{4}$$

៤- លំហ $C^{(l)}(a, b)$

ធាតុទាំងឡាយនៃលំហនេះ គឺគ្រប់អនុគមន៍កំណត់លើ [a, b] និងមានដេរីវេជាប់លើចន្លោះនេះ រហូតដល់លំដាប់ l ។ ប្រមាណវិធីបូកនៃអនុគមន៍ និងប្រមាណវិធីគុណនៃអនុគមន៍នឹងចំនួនមួយ ជាអនុគមន៍កំណត់តាមរបៀបតែមួយ ។

ណម (norme) នៃធាតុ $f(x) \in C^{(l)}(a, b)$ កំណត់ដោយរូបមន្ត :

$$\| f \| = \sum_{k=0}^{l} \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(k)}(x) \right| \tag{5}$$

និង $f^{(0)}(x) = f(x)$ ។

ភាពរួមក្នុងលំហ $C^{(l)}(a, b)$ មានន័យថាភាពរួមស្មើនៃស្វ៊ីតអនុគមន៍ គឺជាស្វ៊ីតដែលមានដេរីវេលំដាប់ k (k = 1, 2, 3, …, l) ផងដែរ ។

សញ្ញាណនៃអនុគមន៍បូកបាន គឺស្ថិតនៅក្នុងលំហពហុវិមាត្រ ។ ដូច្នេះអនុគមន៍ F(x, t) ហៅថាជាអនុគមន៍ការេបូកបានលើ $\Omega = \{ a \leq x,\ t \leq b \}$ បើសិន

$$\int_a^b \int_a^b F^2(x,t)\, dx\, dt < +\infty \text{ ។}$$

គេកំណត់ណមនៃ F(x, t) ដោយសមភាព

$$\| F \| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b F^2(x,t)\, dx\, dt} \tag{6}$$

៥- គេថា *សំណល់* (résidu) នៃ f(z) ត្រង់ចំណុចទោលនិយ័ត $z = a$ គឺជាចំនួន

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz \tag{7}$$

ដែល C ជាខ្សែរង្វង់ $|z - a| = \rho$ (ρ ជាកាំតូចល្មម) ។

បើចំណុច $z = a$ ជាប៉ូលមួយ ដែលមានលំដាប់ n នៃអនុគមន៍ f(z) គេបាន :

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \tag{8}$$

ចំពោះប៉ូលងាយ នៅពេល n = 1 នោះគេបាន

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \lim_{z\to a}\{(z-a)\,f(z)\} \qquad (9)$$

បើ $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(a)\neq 0$ ហើយបើ $\psi(z)$ មានតម្លៃសូន្យត្រង់លំដាប់ទីមួយ $z = a$ មានន័យថា $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$ នោះគេបាន :

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \text{ ។} \qquad (10)$$

សេចក្តីបន្ថែម២

(Annexe2)

១. ការគណនាដេរីវេក្រោមសញ្ញាអាំងតេក្រាល

ទ្រឹស្តីបទ១:

គេឱ្យ $f(x,\alpha)$ និង $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើគ្រប់ (x,α) ក្នុងតំបន់នៃប្លង់ $x\alpha$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1 \le x \le u_2$, $a \le \alpha \le b$ ។ បើ u_1 និង u_2 ជាអនុគមន៍ជាប់និងមានដេរីវេជាប់គ្រប់ $\alpha \in [a,b]$ ហើយតាង

$$\phi(\alpha) = \int_{u_1}^{u_2} f(x,\alpha)\,dx, \quad a \le \alpha \le b \qquad (1)$$

នោះគេបាន

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx + f(u_2,\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} - f(u_1,\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} \qquad (2)$$

ចំពោះ $\alpha \in [a,b]$ ។

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមាន $\phi(\alpha) = \displaystyle\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ នាំឱ្យ

$$\Delta\phi = \phi(\alpha+\Delta\alpha) - \phi(\alpha) = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

$$= \int_{u_1(\alpha+\Delta\alpha)}^{u_1(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx + \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

$$+ \int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

$$= \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,dx$$

$$+\int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_{u_1(\alpha)}^{u_1(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx \qquad (*)$$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមនៃអាំងតេក្រាល យើងបាន:

$$\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx=\Delta\alpha\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\xi)\,dx \qquad (**)$$

$$\int_{u_1(\alpha)}^{u_1(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx=f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)[u_1(\alpha+\Delta\alpha)-u_1(\alpha)] \qquad (***)$$

និង $$\int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx=f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)[u_2(\alpha+\Delta\alpha)-u_2(\alpha)] \qquad (****)$$

ដែល ξ នៅចន្លោះ α និង $\Delta\alpha$, ξ_1 នៅចន្លោះ $u_1(\alpha)$ និង $u_1(\alpha+\Delta\alpha)$ ហើយ ξ_2 នៅចន្លោះ $u_2(\alpha)$ និង $u_2(\alpha+\Delta\alpha)$ ។ តាមសមីការ (*), (**), (***) និង (****) នាំឱ្យ

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\alpha}=\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\xi)\,dx+f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta u_2}{\Delta\alpha}-f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta u_1}{\Delta\alpha}$$

ដោយយក $\Delta\alpha\to 0$ ហើយអនុគមន៍មានដេរីវេជាប់ នោះយើងបាន:

$$\frac{d\phi}{d\alpha}=\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\alpha)\,dx+f[u_2(\alpha),\alpha]\frac{du_2}{d\alpha}-f[u_1(\alpha),\alpha]\frac{du_1}{d\alpha} \text{ ពិត}$$

<u>**ចំណាំ**</u>

- ក្នុងករណីដែល u_1 និង u_2 ជាចំនួនថេរ នោះកន្សោមពីរតួខាងក្រោយនៃ (2) ស្មើសូន្យ ។
- លទ្ធផល (2) ហៅថាជា វិធានលីបនីត (la Règle de Leibnitz) ដែលមានសារប្រយោជន៍ក្នុងការរកតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : បើ $\phi(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha^2}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$, គណនា $\phi'(\alpha)$ ចំពោះ $\alpha\neq 0$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

តាមរូបមន្តលីបនីត យើងបាន:

$$\phi'(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx+\frac{\sin(\alpha\cdot\alpha^2)}{\alpha^2}\frac{d}{d\alpha}(\alpha^2)-\frac{\sin(\alpha\cdot\alpha)}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}(\alpha)$$

$$=\int_{\alpha}^{\alpha^2}\cos\alpha x\,dx+\frac{2\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\Big|_{\alpha}^{\alpha^2}+\frac{2\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}+\frac{2\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}$$

$$=\frac{3\sin\alpha^3-2\sin\alpha^2}{\alpha}$$

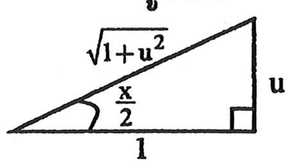
ឧទាហរណ៍ ២ : ក- បង្ហាញថា $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\quad(\alpha>1)$ ។ (3)

ខ- ទាញរកតម្លៃ $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{(2-\cos x)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- តាង $u=\tan\frac{x}{2}$ នាំឱ្យ

រូបទី៥



$$\sin\frac{x}{2}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$$ និង $$du=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$ ឬ $$dx=2\cos^2\frac{x}{2}\,du=\frac{2du}{1+u^2}$$ ។

ពិនិត្យគោលនៃអាំងតេក្រាល

- បើ $x=0$ នោះ $u=0$ ។
- បើ $x\to\pi$ នោះ $u\to+\infty$ ។

យើងបាន

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha-\cos x}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha-\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\frac{2du}{1+u^2}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{\alpha(1+u^2)-1+u^2}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{(\alpha+1)u^2+(\alpha-1)}$$

$$=\frac{2}{(\alpha+1)}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{(\alpha+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$ ពិតចំពោះ $\alpha>1$ ។

ខ- ទាញរកតម្លៃ $\int_0^{\pi}\frac{dx}{(2-\cos x)^2}$ ។

តាង $\phi(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha-\cos x}=\pi\,(\alpha^2-1)^{-1/2}$ $(\alpha>1)$ នោះតាមវិធានលីបនីត យើងបាន:

$$\phi'(\alpha)=-\int_0^{\pi}\frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2}=-\frac{1}{2}\pi\,(2\alpha)\,(\alpha^2-1)^{-1/2}=\frac{-\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}$$

នាំឱ្យ $$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2}=\frac{\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}$$

ដូចនេះ $$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

<u>ចំណាំ</u> យើងក៏អាចគណនាអាំងតេក្រាលខាងលើតាមកម្មវិធី Maple 9.5 ដូចខាងក្រោម:

```
> Int(1/(alpha-cos(x)),x=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\alpha-\cos(x)}\,dx$$

```
> int(1/(alpha-cos(x)),x=0..Pi, 'AllSolutions') assuming
alpha>=1;
```

$$\frac{\pi}{\sqrt{-1+\alpha^2}}$$

```
> Int(1/(2-cos(x))^2,x=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(2-\cos(x))^2}\,dx$$

```
> int(1/(2-cos(x))^2,x=0..Pi);
```

$$\frac{2}{9}\sqrt{3}\,\pi$$

ឧទាហរណ៍ ៣ : បង្ហាញថា $\int_0^x \left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} dt = \int_0^x (x-u)F(u)\,du$ ។ (4)

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាង $I(x) = \int_0^x \left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} dt$ និង $J(x) = \int_0^x (x-u)F(u)\,du$ ។

តាមវិធានលីបនីត យើងបាន:

$$I'(x) = \int_0^x F(u)\,du \quad \text{និង} \quad J'(x) = \int_0^x F(u)\,du \text{ ។}$$

នាំឱ្យ $I'(x) = J'(x)$ ហើយ $I(x) = J(x) + c$ (c ថេរ)

ប៉ុន្តែ $I(0) = J(0) = 0$ នាំឱ្យ $c = 0$ ។

ដូចនេះ $I(x) = J(x)$ ពិត ។

ជួនកាល គេសរសេរលទ្ធផល (4) ខាងលើនេះជាទម្រង់

$$\int_0^x\int_0^x F(x)\,dx^2 = \int_0^x (x-u)\,F(u)\,du \qquad (5)$$

ហើយជាទូទៅ គេសរសេរជាទម្រង់

$$\int_0^x\int_0^x \cdots \int_0^x F(x)\,dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-u)^{n-1}\,F(u)\,du \qquad (6)$$

ឧទាហរណ៍ ៤ : គេឱ្យអនុគមន៍ $F(x,\alpha)$ កំណត់ដោយ:

$$F(x,\alpha) = \frac{x^{\alpha}-1}{\ln x} \ (0<x<1),\ F(0,\alpha)=0 \text{ និង } F(1,\alpha)=\alpha \ (\alpha>0) \text{ ។}$$

ក- បង្ហាញថា F មានអាំងតេក្រាលលើ $[0, 1]$ ។

ខ- គណនា $\phi(\alpha)=\int_0^1 F(x,\alpha)\,dx$ និង $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}dx$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក- យើងបាន $F(x,\alpha)$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់ $x\in[0,1]$ ចំពោះ $\alpha>0$ ។

ដូចនេះ F មានអាំងតេក្រាលលើ $[0,1]$ ។

ខ- គណនា $\phi(\alpha)$ និង $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}dx$ ។

យើងមាន $\phi(\alpha)=\int_0^1 F(x,\alpha)\,dx=\int_0^1 \frac{x^\alpha-1}{\ln x}dx \quad (\alpha>0)$

តាមវិធានលីបនីត យើងបាន:

$$\phi'(\alpha)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{x^\alpha-1}{\ln x}\right)dx=\int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{\ln x}dx$$

$$=\int_0^1 x^\alpha dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}$$

បន្ទាប់មក យើងធ្វើអាំងតេក្រាលធៀបនឹង α នាំឱ្យ

$\phi(\alpha)=\ln(\alpha+1)+c \quad$ (c ជាចំនួនថេរ) ។

ដោយ $\phi(0)=0$ នាំឱ្យ $\ln(1)+c=0$ ឬ $c=0$

ហើយដូចនេះ $\phi(\alpha)=\ln(\alpha+1)$

និង $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}dx=\phi(1)=\ln 2$ ។

២. ការគណនាអាំងតេក្រាលក្រោមសញ្ញាអាំងតេក្រាល

ទ្រឹស្តីបទ២:

បើ $\phi(\alpha)$ កំណត់ក្នុង (1) ហើយ $f(x,\alpha)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ (x,α) ក្នុងតំបន់ $u_1\le x\le u_2$, $a\le\alpha\le b$ ហើយ u_1 និង u_2 ជាចំនួនថេរ នោះគេបាន

$$\int_a^b \phi(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b \left\{\int_{u_1}^{u_2} f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int_{u_1}^{u_2} \left\{\int_a^b f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx \quad (7)$$

លទ្ធផលនេះ ហៅថាជា ការផ្លាស់ប្តូរលំដាប់អាំងតេក្រាល ឬ ការគណនាអាំងតេក្រាលក្រោមសញ្ញាអាំងតេក្រាល ។

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាង $\psi(\alpha) = \int_{u_1}^{u_2} \left\{\int_a^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx \quad (*)$ ។

តាមវិធានលីបនីត យើងបាន:

$$\psi'(\alpha) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\int_a^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx = \int_{u_1}^{u_2} f(x,\alpha)\,dx = \phi(\alpha)$$

នាំឱ្យ $\psi(\alpha) = \int_a^{\alpha} \phi(\alpha)\,d\alpha + c \quad (**)$ ។

ប៉ុន្តែ $\psi(a) = 0$ តាមសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ $c = 0$ តាមសមីការ $(**)$ ។

ដូចនេះតាមសមីការ $(*)$ និង $(**)$ ជាមួយ $c = 0$ នោះយើងបាន:

$$\int_{u_1}^{u_2} \left\{\int_a^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx = \int_a^{\alpha} \left\{\int_{u_1}^{u_2} f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha$$

យើងយក $\alpha = b$ នោះទ្រឹស្តីបទ២ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ ៥: បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right) dx = \pi \ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$ បើ $a, b > 1$ ។

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមានសមីការ (3): $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad (\alpha > 1)$

យើងធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គខាងឆ្វេងធៀបនឹង α ពី a ទៅ b ផ្តល់ឱ្យ

$$\int_0^{\pi} \left\{\int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha - \cos x}\right\} dx = \int_0^{\pi} \ln(\alpha - \cos x)\Big|_a^b dx = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right) dx \quad (*)$$

បន្ទាប់មក យើងធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គខាងស្តាំធៀបនឹង α ពី a ទៅ b ផ្តល់ឱ្យ

$$\int_a^b \frac{\pi d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \pi \ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})\Big|_a^b = \pi \ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right) \qquad (**)$$

តាមសមីការ (*) និង (**) យើងបាន:

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right) dx = \pi \ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$ ពិតគ្រប់ $a, b > 1$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦:

បង្ហាញថា ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ ដែល $y(0) = y'(0) = 0$ ផ្តល់ឱ្យជាអាំងតេក្រាលឌុប ។ ទាញថា $y(x) = \int_0^x (x-t)\, f(t)\, dt$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងមាន $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ ដែល $y(0) = y'(0) = 0$ ។

នាំឱ្យ $\frac{dy}{dx} = \int_0^x f(t)\, dt + c$ ប៉ុន្តែ $y'(0) = 0$

នាំឱ្យ $c = 0$ ហើយ $\frac{dy}{dx} = \int_0^x f(t)\, dt$ ។

នាំឱ្យ $y(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt\right) du + k$ ប៉ុន្តែ $y(0) = 0$

នាំឱ្យ $k = 0$ ហើយដូចនេះ $y(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt\right) du$ ពិត ។

ម្យ៉ាងទៀត $y(x)$ អាចសរសេរជា

$$y(x) = \iint_D f(t)\, dt\, du$$

ដែល $D = \{(t, u) : 0 \le t \le u \le x\}$ ។

ដោយប្តូរលំដាប់អាំងតេក្រាល យើងបាន:

$$y(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt\right) du = \int_0^x \left(\int_t^x du\right) f(t)\, dt = \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ ៧ : ក- បង្ហាញតាមវិធីពីរយ៉ាងថា $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$ $(\alpha > 1)$ ។ (8)

ខ- ទាញបង្ហាញថា $\int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{5 + 3\sin x}{5 + 4\sin x}\right) dx = 2\pi \ln\left(\frac{9}{8}\right)$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក- ***<u>របៀបទី១</u>*** : តាង $u = \tan\frac{x}{2}$ នាំឱ្យ $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ និង $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ ។

ពិនិត្យគោលនៃអាំងតេក្រាល

- បើ $x = 0$ នាំឱ្យ $u = 0$ ។
- បើ $x = 2\pi$ នាំឱ្យ $u = 0$ ។
- បើ $x \to \pi - \varepsilon$ នាំឱ្យ $u \to +\infty$ $(\varepsilon \to 0^+)$ ។
- បើ $x \to \pi + \varepsilon$ នាំឱ្យ $u \to -\infty$ $(\varepsilon \to 0^+)$ ។

យើងបាន

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{\pi - \varepsilon} \frac{dx}{\alpha + \sin x} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \sin x}$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{1}{\alpha + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2} + \lim_{u \to -\infty} \int_u^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2du}{1+u^2}$$

$$= \frac{2}{\alpha} \lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{du}{1 + u^2 + \frac{2u}{\alpha}} + \frac{2}{\alpha} \lim_{u \to -\infty} \int_u^{2\pi} \frac{du}{1 + u^2 + \frac{2u}{\alpha}}$$

$$= \frac{2}{\alpha} \lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{du}{(u + \frac{1}{\alpha})^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}} + \frac{2}{\alpha} \lim_{u \to -\infty} \int_u^{2\pi} \frac{du}{(u + \frac{1}{\alpha})^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}}$$

$$= \frac{2}{\alpha \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)/\alpha^2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{2}{\alpha \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)/\alpha^2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{2\pi}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$ ពិតគ្រប់ $\alpha > 1$ ។

<u>របៀបទី២</u>:

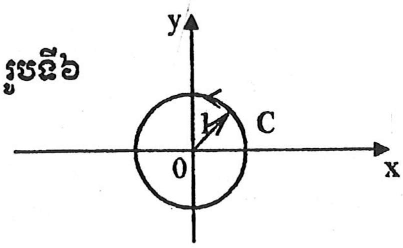
តាង $z=e^{ix}$ នាំឱ្យ $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ និង $dz=ie^{ix}dx=iz\,dx$

ឬ $\dfrac{dz}{iz}=dx$ ។ យើងបាន:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\alpha+\sin x}=\oint_C\frac{dz/(iz)}{\alpha+(z-z^{-1})/(2i)}=\oint_C\frac{2\,dz}{z^2+2i\alpha z-1}$$

ដែល C ជារង្វង់ដែលមានកាំ 1 និងផ្ចិតនៅត្រង់គល់អ័ក្ស ដែលបង្ហាញក្នុងរូបទី ៦ ។

រូបទី៦



ប៉ូលនៃ $\dfrac{2}{z^2+2i\alpha z-1}$ ទទួលបានតាមការដោះស្រាយសមីការ $z^2+2i\alpha z-1=0$ ហើយ

កំណត់ដោយ:

$$\begin{cases} z_1=-i\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right) \\ z_2=i\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\end{cases} \text{ គ្រប់ } \alpha>1$$

ដោយ $|z_1|=\left|-i\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right|=\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}>1$ គ្រប់ $\alpha>1$

និង $|z_2|=\left|i\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right|=\dfrac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}<1$ គ្រប់ $\alpha>1$ ។

នាំឱ្យ $z_2=i\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)$ ស្ថិតនៅខាងក្នុង C ហើយតាមសេចក្តីបន្ថែម១ យើងបាន:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}\left(\frac{2}{z^2+2i\alpha z-1}\right)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{2}{z^2+2i\alpha z-1}$$

$$=\lim_{z\to z_2}\frac{2}{z+i\alpha+i\sqrt{\alpha^2-1}}=\frac{1}{i\sqrt{\alpha^2-1}}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\alpha+\sin x}=\oint_C\frac{2\,dz}{z^2+2i\alpha z-1}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_2}\left(\frac{2}{z^2+2i\alpha z-1}\right)$

$$=\frac{2\pi i}{i\sqrt{\alpha^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$ ពិតគ្រប់ $\alpha>1$ ។

ខ- ទាញបង្ហាញថា $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx=2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right)$ ។

តាមសំណួរ ក យើងមាន $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\alpha+\sin x}=\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\quad(\alpha>1)$

នាំឱ្យ $$\int_a^b\left\{\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\alpha+\sin x}\right\}d\alpha=\int_a^b\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}\,d\alpha$$

សមមូល $$\int_0^{2\pi}\left\{\int_a^b\frac{d\alpha}{\alpha+\sin x}\right\}dx=2\pi\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\Big|_a^b$$

សមមូល $$\int_0^{2\pi}\ln|\alpha+\sin x|\Big|_a^b\,dx=2\pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$

ឬ $$\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{b+\sin x}{a+\sin x}\right)dx=2\pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$

បើយើងយក $b=\frac{5}{3}$ និង $a=\frac{5}{4}$ នោះយើងបាន:

$$\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5/3+\sin x}{5/4+\sin x}\right)dx=2\pi\ln\left(\frac{5/3+\sqrt{(5/3)^2-1}}{5/4+\sqrt{(5/4)^2-1}}\right)$$

ឬ $$2\pi\ln\frac{4}{3}+\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx=2\pi\ln\frac{3}{2}$$

នាំឱ្យ $$\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx=2\pi\ln\frac{3}{2}-2\pi\ln\frac{4}{3}=2\pi\ln\frac{9}{8}$$ ពិត ។

លំហាត់សេចក្តីបន្ថែមទ២

1. បើ $F(\alpha)=\int_{3\alpha^3}^{2\alpha^2}\sqrt{1+\alpha x}\,dx$, រក $F'(\alpha)$ ។

2. បើ $\phi(\alpha)=\int_{\sqrt{\alpha}}^{1/\alpha}\cos\alpha x^2\,dx$, រក $\dfrac{d\phi}{d\alpha}$ ។

3. បើ $\psi(\alpha)=\int_{\alpha^2}^{\sqrt{\alpha^2+1}}\sin[(2\alpha+1)x^3]\,dx$, រក $\dfrac{d\psi}{d\alpha}$ ។

4. ក- បើ $G(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}\sqrt{1+\alpha^2 x}\,dx$, រក $\dfrac{dG}{d\alpha}$ តាមវិធានលីបនីត ។

ខ- ផ្ទៀងផ្ទាត់លទ្ធផលក្នុងសំណួរ ក តាមវិធីគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្ទាល់ ។

5. ក- បើ $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}\tan^{-1}\dfrac{x}{\alpha}\,dx$, រក $\dfrac{dF}{d\alpha}$ តាមវិធានលីបនីត ។

ខ- ផ្ទៀងផ្ទាត់លទ្ធផលក្នុងសំណួរ ក តាមវិធីគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្ទាល់ ។

6. គេឱ្យ $\int_0^1 x^p\,dx=\dfrac{1}{p+1}$, $p>-1$ ។ បង្ហាញថា

$$\int_0^1 x^p(\ln x)^m\,dx=\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{m+1}},\quad m=1,2,3,\ldots\ldots$$ ។

7. បង្ហាញថា

$$\int_0^{\pi}\ln(1+\alpha\cos x)\,dx=\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right),\quad |\alpha|<1$$ ។

8. បង្ហាញថា

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=\begin{cases}\pi\ln\alpha^2 & \text{បើ } |\alpha|<1\\ 0 & \text{បើ } |\alpha|>1\end{cases}$$ ។

ចូរសិក្សាករណីដែល $|\alpha|=1$ ។

9. បង្ហាញថា $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{(5-3\cos x)^3}=\frac{59\pi}{2048}$ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\int_0^1 \left\{ \int_1^2 (\alpha^2 - x^2)\, dx \right\} d\alpha = \int_1^2 \left\{ \int_0^1 (\alpha^2 - x^2)\, d\alpha \right\} dx \text{ ។}$$

11. ក- គណនា $\int_0^{2\pi} (\alpha - \sin x)\, dx$ ។

ខ- បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនថេរ a និង b នោះគេបាន

$$\int_0^{2\pi} \left\{ (b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2 \right\} dx = 2\pi (b^2 - a^2) \text{ ។}$$

12. ក- បង្ហាញថា $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \alpha \cos x} = \frac{\cos^{-1} \alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (0 \le \alpha < 1)$ ។

ខ- ដោយប្រើសំណួរ ក ចូរបង្ហាញថា

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \ln\left(\frac{1 + b \cos x}{1 + a \cos x} \right) dx = \frac{1}{2} \left\{ (\cos^{-1} a)^2 - (\cos^{-1} b)^2 \right\}$$

$\forall a \in [0, 1[,\ \forall b \in [0, 1[$ ។

គ- ទាញបង្ហាញថា

$$\int_0^{\pi/2} \sec x \ln\left(1 + \frac{1}{2} \cos x \right) dx = \frac{5\pi^2}{72} \text{ ។}$$

13. ក- បង្ហាញថា

$$I_M = \int_0^M \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^3} \tan^{-1} \frac{M}{\alpha} + \frac{M}{2\alpha^2 (\alpha^2 + M^2)} \quad (\alpha \ne 0) \text{ ។}$$

ខ- គណនា $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}$ ។

គ- តើ $\lim\limits_{M \to +\infty} \frac{d}{d\alpha} \int_0^M \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{d}{d\alpha} \lim\limits_{M \to +\infty} \int_0^M \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}$ ឬទេ?

14. ក- បង្ហាញថា $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\alpha \cos x + \sin x} = \frac{\alpha \pi}{2(\alpha^2 + 1)} - \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + 1} \quad (\alpha > 0)$ ។

ខ- ប្រើសំណួរ ក បង្ហាញថា $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\, dx}{(2\cos x + \sin x)^2} = \frac{3\pi + 5 - 8\ln 2}{50}$ ។

ឯកសារពិគ្រោះ

១- M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, ***Équations Intégrales***, France, © Traduction française Editions Mir 1977.

២- Richard Bronson, ***Differential Equations***, New York, McGraw-Hill, Inc., Second Edition, 1994.

៣- Murray R. Spiegel, Ph.D., ***Theory and Problems of Advanced Calculus***, New York, McGraw-Hill Book Co., 1981.

៤- Stanley J. Farlow, ***An Introduction to Differential Equations and Their Applications***, New York, McGraw-Hill, Inc., 1994.

៥- Serge Lang, ***Complex Analysis***, USA, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1977.

៦- S . L . Salas and Einar Hille, ***Calculus (One and Several Variables)***, New York, John Wiley & Sons, Inc., Sixth Edition, 1990.

៧- W . Keith Nicholson, ***Linear Algebra with Applications***, New York, McGraw-Hill Ryerson Limited, Fourth Edition, 2003.

៨- លោក ម៉ែន សុគន្ធ និង លោក អាស៊ី អៀវ៉ាន “ ***សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល***”, សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ឆ្នាំ 2000.

៩- Maplesoft, ***Maple 9.50***, a division of Waterloo Maple Inc., 2004.